Dziedzina równania

Zawsze, gdy rozwiązujemy równanie, zaczynamy od określenia jego dziedziny - tzn. zbioru liczb, które mogą być potencjalnym rozwiązaniem. Musimy zwrócić uwagę na dwie rzeczy:

Zawsze, gdy rozwiązujemy równanie, zaczynamy od określenia jego dziedziny - tzn. zbioru liczb, które mogą być potencjalnym rozwiązaniem. Musimy zwrócić uwagę na dwie rzeczy:

- mianowniki - te nie mogą być 0,

Zawsze, gdy rozwiązujemy równanie, zaczynamy od określenia jego dziedziny - tzn. zbioru liczb, które mogą być potencjalnym rozwiązaniem. Musimy zwrócić uwagę na dwie rzeczy:

- mianowniki - te nie mogą być 0,
- pierwiastki parzystego stopnia - pod takimi pierwiastkami nie mogą występować liczby ujemne.

Na następnych slajdach określimy dziedziny prostych równań, w których występują ułamki i pierwiastki.

Przykład 1

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x-5} = 3$$

Przykład 1

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x-5} = 3$$

W mianownikach występują wyrażenia $x-1$ oraz $x-5$. Żadne z nich nie może się równać zero, a więc $x \neq 1$ oraz $x \neq 5$, czyli dziedziną równania będzie zbiór $\mathbb{R} - \{1, 5\}$.

Przykład 1

$$\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x-5} = 3$$

W mianownikach występują wyrażenia $x-1$ oraz $x-5$. Żadne z nich nie może się równać zero, a więc $x \neq 1$ oraz $x \neq 5$, czyli dziedziną równania będzie zbiór $\mathbb{R} - \{1, 5\}$.

Uwaga: w liczniku występuje x, ale licznik może być zerem, a więc 0 należy do dziedziny tego równania.

Przykład 2

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{7-x}=1$$

Przykład 2

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{7-x}=1$$

Pod pierwiastkiem drugiego stopnia występują wyrażenia $x+2$ oraz $7-x$. Żadne z nich nie może być mniejsze zero, stąd $x \geqslant -2$ oraz $x \leqslant 7$, czyli dziedziną równania będzie zbiór $[-2, 7]$.

Przykład 2

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{7-x}=1$$

Pod pierwiastkiem drugiego stopnia występują wyrażenia $x+2$ oraz $7-x$. Żadne z nich nie może być mniejsze zero, stąd $x \geqslant -2$ oraz $x \leqslant 7$, czyli dziedziną równania będzie zbiór $[-2, 7]$.

Uwaga: do dziedziny należą liczby -2 oraz 7, gdyż pod pierwiastkiem może występować 0.

Przykład 3

$$\frac{3}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{6-x} = 12$$

Przykład 3

$$\frac{3}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{6-x} = 12$$

Pod pierwiastkiem drugiego stopnia występują wyrażenia $x-3$ oraz $6-x$. Żadne z nich nie może być mniejsze zero, stąd $x \geqslant 3$ oraz $x \leqslant 6$. Dodatkowo $\sqrt{x-3}$ występuje w mianowniku, a więc nie może być 0, czyli $x \neq 3$. Ostatecznie dziedziną równania będzie zbiór $(3, 6]$.

Przykład 3

$$\frac{3}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{6-x} = 12$$

Pod pierwiastkiem drugiego stopnia występują wyrażenia $x-3$ oraz $6-x$. Żadne z nich nie może być mniejsze zero, stąd $x \geqslant 3$ oraz $x \leqslant 6$. Dodatkowo $\sqrt{x-3}$ występuje w mianowniku, a więc nie może być 0, czyli $x \neq 3$. Ostatecznie dziedziną równania będzie zbiór $(3, 6]$.

Uwaga: do dziedziny nie należy liczba 3, gdyż pomimo tego, że pierwiastek z 0 nie stanowi problemu, to pojawi się 0 w mianowniku.

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=0$$

Najpierw dziedzina.

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0$$

Najpierw dziedzina. Mianownik nie może być 0. W mianowniku mamy wzór skróconego mnożenia:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \neq 0$$

czyli $x \neq 2$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0$$

Najpierw dziedzina. Mianownik nie może być 0. W mianowniku mamy wzór skróconego mnożenia:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \neq 0$$

czyli $x \neq 2$. Dziedziną naszego równania będzie $\mathbb{R} - \{2\}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0 \tag{1}$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0 \qquad (1)$$

Mając dziedzinę możemy rozwiązywać.

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0 \tag{1}$$

Mając dziedzinę możemy rozwiązywać. Mnożymy obie strony przez mianownik, by otrzymać

$$x^2 - 4 = 0 \tag{2}$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x = 2$ lub $x = -2$. Czyli zbiorem rozwiązań równania (2) jest zbiór $\{-2, 2\}$.

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = 0 \tag{1}$$

Mając dziedzinę możemy rozwiązywać. Mnożymy obie strony przez mianownik, by otrzymać

$$x^2 - 4 = 0 \tag{2}$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

Mamy dwa rozwiązania $x = 2$ lub $x = -2$. Czyli zbiorem rozwiązań równania (2) jest zbiór $\{-2, 2\}$. Nas jednak interesuje równanie (1), pamiętamy o jego dziedzinie, a więc zbiorem rozwiązań będzie $\{-2\}$.

Przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x(x^2+1)(x^2-9)}{x+3} = 0 \tag{3}$$

Przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x(x^2+1)(x^2-9)}{x+3} = 0 \tag{3}$$

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

Przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x(x^2+1)(x^2-9)}{x+3} = 0 \tag{3}$$

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ Mnożymy obie strony przez mianownik, by otrzymać

$$x(x^2+1)(x^2-9) = 0 \tag{4}$$

Przykład 5

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x(x^2+1)(x^2-9)}{x+3} = 0 \tag{3}$$

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ Mnożymy obie strony przez mianownik, by otrzymać

$$x(x^2+1)(x^2-9) = 0 \tag{4}$$

Czyli $x = 0$ lub $x^2 + 1 = 0$ lub $x^2 - 9 = 0$. Drugie równanie nie ma rozwiązań (dlaczego?). Trzecie ma rozwiązania $x = 3$ i $x = -3$. Ostatecznie zbiór rozwiązań równania (4) to $\{-3, 0, 3\}$. Natomiast zbiór rozwiązań naszego równania (3) to $\{0, 3\}$, gdyż -3 nie należy do dziedziny tego równania.

Na wejściówkę trzeba umieć określić dziedzinę równania, w której występują ułamki i pierwiastki oraz rozwiązać przykłady analogiczne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.