Rozwiązywanie nierówności

Musimy umieć rozwiązać proste nierówności z wykorzystaniem schematu znaków (sign diagram) dla danego wyrażenia.

Na następnych slajdach omówiona zostanie metoda schematu znaków (sign diagram) oraz przykłady prostych nierówności.

Sign diagram - przykład 1

Dane jest wyrażenie $(x+2)(x-3)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

Sign diagram - przykład 1

Dane jest wyrażenie $(x+2)(x-3)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

Wiemy już, że dziedziną tego wyrażenia są liczby rzeczywiste oraz, że wyrażenie ma wartość 0 dla $x=-2$ oraz dla $x=3$

Sign diagram - przykład 1

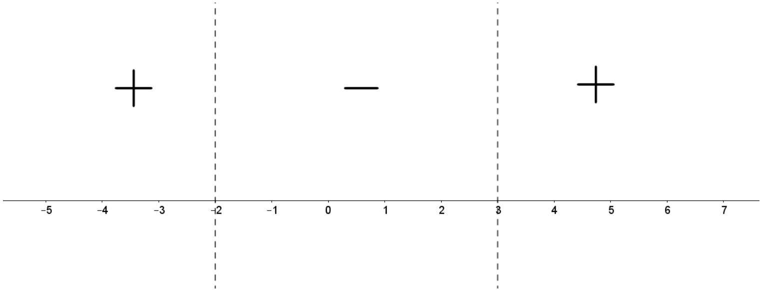
Dane jest wyrażenie $(x+2)(x-3)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

Wiemy już, że dziedziną tego wyrażenia są liczby rzeczywiste oraz, że wyrażenie ma wartość 0 dla $x=-2$ oraz dla $x=3$

Pytanie: jaki znak ma dane wyrażenie dla $x<-2$, dla $-2<x<3$ oraz dla $x>3$.

Sign diagram - przykład 1

W określeniu znaku wyrażenia (szczególnie bardziej złożonego) pomocny jest tzw. sign diagram. Rysujemy oś X oraz pionowymi (przerywanymi) liniami oznaczamy miejsca, w których nasze wyrażenie jest 0 lub nie jest zdefiniowane (x nie należy do dziedziny). By określić znak pomiędzy pionowymi liniami, podstawiamy dowolną liczbę z danego przedziału do wyrażenia. Otrzymujemy:



Sign diagram - przykład 1

Po lewej stronie od -2 jest $+$, gdyż podstawiając np. -3 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(-3+2)(-3-3) = (-1)(-6) = 6$$

czyli liczbę dodatnią.

Sign diagram - przykład 1

Po lewej stronie od -2 jest $+$, gdyż podstawiając np. -3 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(-3+2)(-3-3) = (-1)(-6) = 6$$

czyli liczbę dodatnią. Uwaga: można było podstawić dowolną inną liczbę z tego przedziału (np. -5 albo -4.123), podstawiamy zazwyczaj tę, dla której łatwo będzie obliczyć wynik.

Sign diagram - przykład 1

Po lewej stronie od -2 jest $+$, gdyż podstawiając np. -3 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(-3+2)(-3-3) = (-1)(-6) = 6$$

czyli liczbę dodatnią. Uwaga: można było podstawić dowolną inną liczbę z tego przedziału (np. -5 albo -4.123), podstawiamy zazwyczaj tę, dla której łatwo będzie obliczyć wynik.

Pomiędzy -2 a 3 jest $-$, gdyż podstawiając np. 0 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(0+2)(0-3) = (2)(-3) = -6$$

czyli liczbę ujemną.

Sign diagram - przykład 1

Po lewej stronie od -2 jest $+$, gdyż podstawiając np. -3 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(-3+2)(-3-3) = (-1)(-6) = 6$$

czyli liczbę dodatnią. Uwaga: można było podstawić dowolną inną liczbę z tego przedziału (np. -5 albo -4.123), podstawiamy zazwyczaj tę, dla której łatwo będzie obliczyć wynik.

Pomiędzy -2 a 3 jest $-$, gdyż podstawiając np. 0 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(0+2)(0-3) = (2)(-3) = -6$$

czyli liczbę ujemną. Uwaga: znów można było podstawić np. -1 albo $\frac{1}{2}$.

Sign diagram - przykład 1

Na prawo od 3 jest $+$, gdyż podstawiając np. 4 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(4+2)(4-3) = (6)(1) = 6$$

czyli liczbę dodatnią.

Sign diagram - przykład 1

Na prawo od 3 jest $+$, gdyż podstawiając np. 4 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(4+2)(4-3) = (6)(1) = 6$$

czyli liczbę dodatnią. Uwaga: znów można było podstawić np. 7 albo 145.

Sign diagram - przykład 1

Na prawo od 3 jest $+$, gdyż podstawiając np. 4 za x do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(4+2)(4-3) = (6)(1) = 6$$

czyli liczbę dodatnią. Uwaga: znów można było podstawić np. 7 albo 145.

Ostatecznie otrzymujemy następujący wynik:
Wyrażenie $(x+2)(x-3)$ jest

- zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- 0 dla $x = -2$ oraz $x = 3$,
- dodatnie dla $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$,
- ujemne dla $x \in (-2, 3)$.

Sign diagram - przykład 2

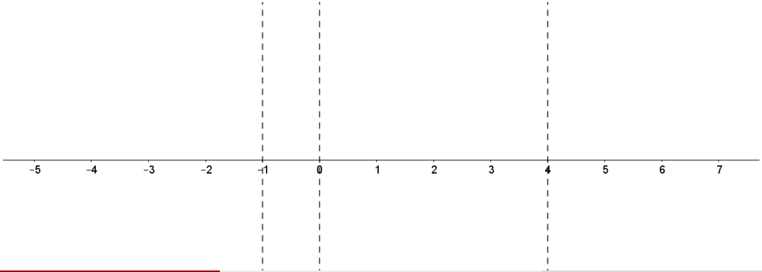
Dane jest wyrażenie $x(x+1)(x-4)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

Sign diagram - przykład 2

Dane jest wyrażenie $x(x+1)(x-4)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

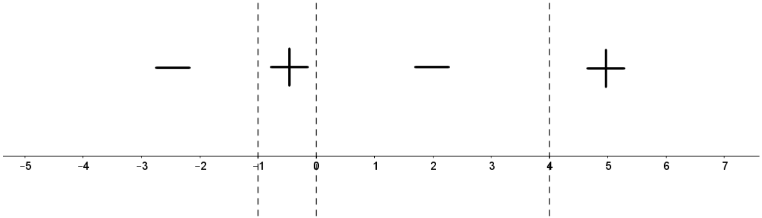
- Dziedziną są liczby rzeczywiste - nasze wyrażenie jest zdefiniowane dla każdego x,
- $x(x+1)(x-4) = 0$ dla $x = 0$, $x = -1$ oraz $x = 4$.

Rysujemy sign diagram:



Sign diagram - przykład 2

Podstawiamy liczby z odpowiednich przedziałów, np. -2 dla pierwszego, $-\frac{1}{2}$ dla drugiego, 1 dla trzeciego i 5 dla czwartego. Otrzymujemy:



Sign diagram - przykład 2

Wniosek: wyrażenie $x(x+1)(x-4)$ jest

- zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- 0 dla $x = -1$, $x = 0$ oraz $x = 4$,
- dodatnie dla $x \in (-1, 0) \cup (4, \infty)$,
- ujemne dla $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 4)$.

Sign diagram - przykład 3

Dane jest wyrażenie $x(x+2)^2(x^2-9)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

Sign diagram - przykład 3

Dane jest wyrażenie $x(x+2)^2(x^2-9)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

W naszym wyrażeniu występują czynnik, które nie są liniowe (nie są postaci $(ax+b)$). W związku z tym musimy wykonać dodatkowy krok - jeśli to możliwe, zredukować wyrażenie do iloczynu czynników liniowych:

Sign diagram - przykład 3

Dane jest wyrażenie $x(x+2)^2(x^2-9)$. Ustal znak tego wyrażenia w zależności od x.

W naszym wyrażeniu występują czynnik, które nie są liniowe (nie są postaci $(ax+b)$). W związku z tym musimy wykonać dodatkowy krok - jeśli to możliwe, zredukować wyrażenie do iloczynu czynników liniowych:

$$x(x+2)^2(x^2-9) = x(x+2)(x+2)(x-3)(x+3)$$

Sign diagram - przykład 3

Możemy postawić już dwa wnioski. Wyrażenie $x(x+2)^2(x^2-9)$ jest

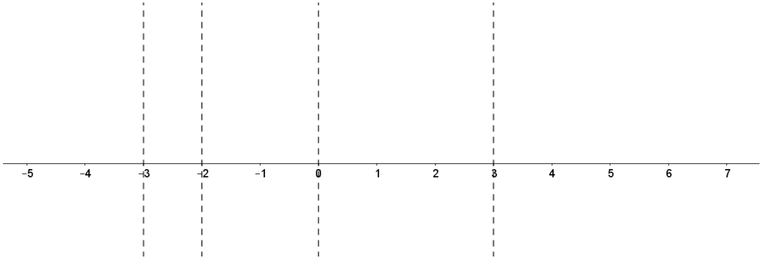
- zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- 0 dla $x=-3$, $x=-2$, $x=0$ oraz $x=3$.

Sign diagram - przykład 3

Możemy postawić już dwa wnioski. Wyrażenie $x(x+2)^2(x^2-9)$ jest

- zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- 0 dla $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$ oraz $x = 3$.

Rysujemy sign diagram:



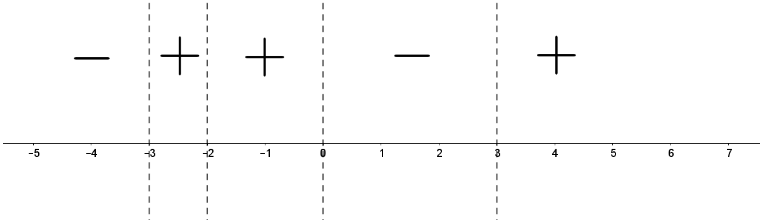
Sign diagram - przykład 3

Sprawdzamy wartości w odpowiednich przedziałach podstawiając np. -4, -2.5, -1, 1 oraz 4.

Sign diagram - przykład 3

Sprawdzamy wartości w odpowiednich przedziałach podstawiając np. -4, -2.5, -1, 1 oraz 4.

Otrzymujemy:



Sign diagram - przykład 3

Wniosek: wyrażenie $x(x+2)^2(x^2-9)$ jest

- zdefiniowane dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
- 0 dla $x = -3$, $x = -2$, $x = 0$ oraz $x = 3$,
- dodatnie dla $x \in (-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (3, \infty)$,
- ujemne dla $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$.

Nierówność - przykład 1

Rozwiąż nierówność

$$(x + 3)(x - 1) < 0$$

Nierówność - przykład 1

Rozwiąż nierówność

$$(x+3)(x-1)<0$$

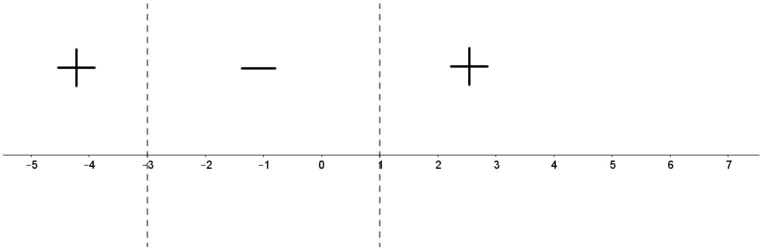
Rysujemy sign diagram:

Nierówność - przykład 1

Rozwiąż nierówność

$$(x+3)(x-1) < 0$$

Rysujemy sign diagram: Otrzymujemy:



Nierówność - przykład 1

Rozwiąż nierówność

$$(x+3)(x-1) < 0$$

Nierówność - przykład 1

Rozwiąż nierówność

$$(x+3)(x-1) < 0$$

Rozwiązaniem będzie zbiór

$$x \in (-3, 1)$$

Nierówność - przykład 1

Rozwiąż nierówność

$$(x+3)(x-1) < 0$$

Rozwiązaniem będzie zbiór

$$x \in (-3, 1)$$

Uwaga: nawiasy są otwarte, gdyż chcemy, by wyrażenie było mniejsze od 0. Dla $x = -3$ i $x = 1$, wyrażenie przyjmuje wartość 0.

Nierówność - przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$(x-4)(1+2x) \leqslant 0$$

Nierówność - przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$(x-4)(1+2x) \leqslant 0$$

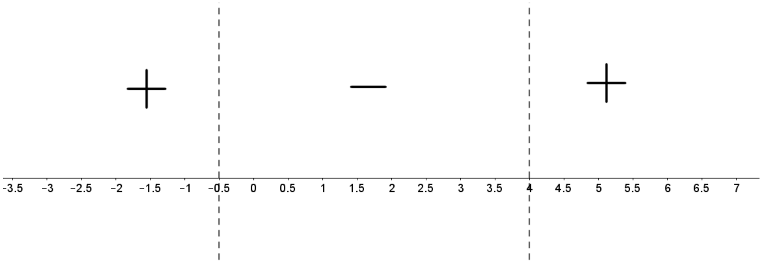
Rysujemy sign diagram:

Nierówność - przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$(x-4)(1+2x) \leqslant 0$$

Rysujemy sign diagram: Otrzymujemy:



Nierówność - przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$(x-4)(1+2x) \leqslant 0$$

Nierówność - przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$(x-4)(1+2x) \leqslant 0$$

Rozwiązaniem będzie zbiór

$$x \in \langle -0.5, 4 \rangle$$

Nierówność - przykład 2

Rozwiąż nierówność

$$(x-4)(1+2x) \leqslant 0$$

Rozwiązaniem będzie zbiór

$$x \in \langle -0.5, 4 \rangle$$

Uwaga: nawiasy są zamknięte, gdyż chcemy, by wyrażenie było mniejsze lub **równe** 0.

Nierówność - przykład 3

Rozwiąż nierówność

$$2(x-3) < x(x-3)$$

Nierówność - przykład 3

Rozwiąż nierówność

$$2(x-3) < x(x-3)$$

Przekształcamy nierówność do postaci iloczynu czynników liniowych:

$$\begin{aligned} 2(x-3) &< x(x-3) \\ 2(x-3) - x(x-3) &< 0 \\ (x-3)(2-x) &< 0 \end{aligned}$$

Nierówność - przykład 3

Rozwiąż nierówność

$$2(x-3) < x(x-3)$$

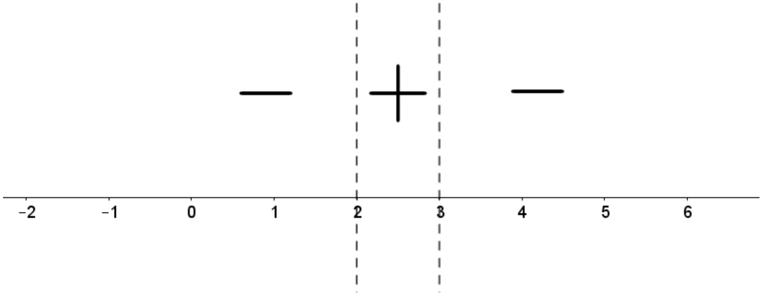
Przekształcamy nierówność do postaci iloczynu czynników liniowych:

$$\begin{aligned} 2(x-3) &< x(x-3) \\ 2(x-3) - x(x-3) &< 0 \\ (x-3)(2-x) &< 0 \end{aligned}$$

Uwaga: ostatnie przekształcenie to wyciągnięcie czynnika $(x-3)$ przed nawias.

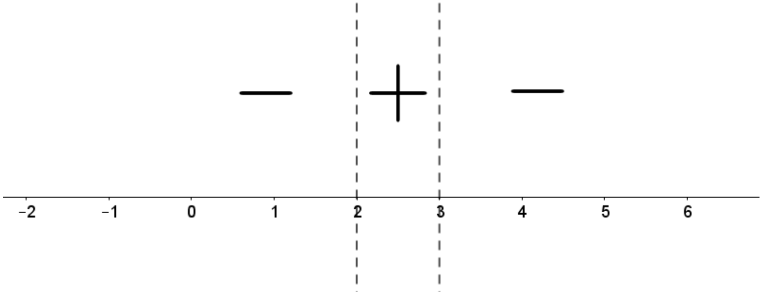
Nierówność - przykład 3

Rysujemy sign diagram:



Nierówność - przykład 3

Rysujemy sign diagram:



Rozwiązaniem będzie zbiór:

$$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

Uwagi końcowe

Sign diagram stosujemy tylko w pewnych szczególnych przypadkach:

- Po lewej stronie nierówności musi występować iloczyn lub iloraz.
- Po prawej stronie musi występować 0.

Nie wykorzystamy sign diagram (a przynajmniej jeszcze nie) do rozwiązania nierówności typu:

$$x^2 + x + 1 > 0$$

czy

$$(x-2)(x+1) > 1$$

W związku z powyższym naszym pierwszym celem jest zapisanie naszej nierówności tak, by spełniała powyższe punkty. Nie zawsze jest to proste/możliwe.

Na wejściówkę trzeba umieć zrobić przykłady analogiczne do tych z prezentacji.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.