Elementy logiki

Prosty fakt:

Aby wykazać, że dane zdanie p jest fałszywe, należy pokazać, że zaprzeczenie (negacja) tego zdania (czyli $\neg p$) jest prawdziwe.

Prosty fakt:

Aby wykazać, że dane zdanie p jest fałszywe, należy pokazać, że zaprzeczenie (negacja) tego zdania (czyli $\neg p$) jest prawdziwe.

W związku z powyższym faktem, musimy umieć zaprzeczać zdaniom. W szczególności musimy umieć negować zdania, które mają postać okresu warunkowego (conditional statement) oraz zdania z kwantyfikatorami (czyli takie, które zaczynają się od zwrotów "każda", "żadna", "istnieje", "niektóre" itp.).

Prosty fakt:

Aby wykazać, że dane zdanie p jest fałszywe, należy pokazać, że zaprzeczenie (negacja) tego zdania (czyli $\neg p$) jest prawdziwe.

W związku z powyższym faktem, musimy umieć zaprzeczać zdaniom. W szczególności musimy umieć negować zdania, które mają postać okresu warunkowego (conditional statement) oraz zdania z kwantyfikatorami (czyli takie, które zaczynają się od zwrotów "każda", "żadna", "istnieje", "niektóre" itp.).

Dodatkowo mając dane twierdzenie w postaci okresu warunkowego, musimy umieć zapisać twierdzenie do niego odwrotne (converse).

Na następnych slajdach omówione zostaną przykłady zdań warunkowych i zdań z kwantyfikatorami oraz ich zaprzeczenia.

Conditional statements

Zdania z okresem warunkowym to zdania postaci

Jeśli p, to q.

Conditional statements

Zdania z okresem warunkowym to zdania postaci

Jeśli p, to q.

Przykłady:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2 + 2 = 5$.
- Jeśli będziesz się uczyć, to dostaniesz 5.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Conditional statements

Przeanalizujmy ostatni przykład:

Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Conditional statements

Przeanalizujmy ostatni przykład:

Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Jest to oczywiście zdanie fałszywe. Jak to wykazać?

Conditional statements

Przeanalizujmy ostatni przykład:

Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Jest to oczywiście zdanie fałszywe. Jak to wykazać? Musimy znaleźć liczbę, dla której poprzednik implikacji (czyli to, co występuje pomiędzy "jeśli" a "to") jest prawdziwy, a następnik (czyli to, co występuje po "to") jest fałszywy.

Conditional statements

Przeanalizujmy ostatni przykład:

Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Jest to oczywiście zdanie fałszywe. Jak to wykazać? Musimy znaleźć liczbę, dla której poprzednik implikacji (czyli to, co występuje pomiędzy "jeśli" a "to") jest prawdziwy, a następnik (czyli to, co występuje po "to") jest fałszywy.

Przykładem takiej liczby jest 9, gdyż zdanie "9 jest podzielne przez 3" jest prawdziwe, ale zdanie "9 jest podzielne przez 6" jest fałszywe.

Conditional statements

Mając dane zdanie postaci

Jeśli p, to q.

by wykazać, że jest ono fałszywe, musimy wykazać, że p może być prawdziwe, a q fałszywe.

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

a) *Jeśli liczba jest większa od 100, to jest też większa od 101*

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

a) *Jeśli liczba jest większa od 100, to jest też większa od 101*

Liczba 100.5 jest kontrprzykładem. 100.5 jest większe od 100 (pierwsze zdanie prawdzie), ale 100.5 nie jest większe od 101 (drugie zdanie fałszywe).

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

a) *Jeśli liczba jest większa od 100, to jest też większa od 101*

Liczba 100.5 jest kontrprzykładem. 100.5 jest większe od 100 (pierwsze zdanie prawdzie), ale 100.5 nie jest większe od 101 (drugie zdanie fałszywe).

b) *Jeśli $x^2 = 4$, to $x = 2$.*

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

a) *Jeśli liczba jest większa od 100, to jest też większa od 101*

Liczba 100.5 jest kontrprzykładem. 100.5 jest większe od 100 (pierwsze zdanie prawdzie), ale 100.5 nie jest większe od 101 (drugie zdanie fałszywe).

b) *Jeśli* $x^2 = 4$, *to* $x = 2$.

Liczba -2 jest kontrprzykładem, gdyż $(-2)^2 = 4$ czyli pierwsze zdanie jest prawdziwe, ale $-2 \neq 2$, czyli drugie zdanie jest fałszywe.

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

a) *Jeśli liczba jest większa od 100, to jest też większa od 101*

Liczba 100.5 jest kontrprzykładem. 100.5 jest większe od 100 (pierwsze zdanie prawdzie), ale 100.5 nie jest większe od 101 (drugie zdanie fałszywe).

b) *Jeśli* $x^2 = 4$, *to* $x = 2$.

Liczba -2 jest kontrprzykładem, gdyż $(-2)^2 = 4$ czyli pierwsze zdanie jest prawdziwe, ale $-2 \neq 2$, czyli drugie zdanie jest fałszywe.

c) *Jeśli liczba jest podzielna przez* 2, *to jest podzielna przez* 4.

Przykłady

Wykaż, że poniższe zdania są fałszywe:

a) *Jeśli liczba jest większa od 100, to jest też większa od 101*

Liczba 100.5 jest kontrprzykładem. 100.5 jest większe od 100 (pierwsze zdanie prawdzie), ale 100.5 nie jest większe od 101 (drugie zdanie fałszywe).

b) *Jeśli* $x^2 = 4$, *to* $x = 2$.

Liczba -2 jest kontrprzykładem, gdyż $(-2)^2 = 4$ czyli pierwsze zdanie jest prawdziwe, ale $-2 \neq 2$, czyli drugie zdanie jest fałszywe.

c) *Jeśli liczba jest podzielna przez* 2, *to jest podzielna przez* 4.

Liczba 6 jest kontrprzykładem, gdyż 6 jest podzielne przez 2 (pierwsze zdanie prawdziwe), ale 6 nie jest podzielne przez 4 (drugie zdanie fałszywe)

Converse

Mając dane twierdzenie postaci:

Jeśli p, to q.

twierdzeniem odwrotnym będzie:

Jeśli q, to p.

Converse

Twierdzenia:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2+2=5$.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Converse

Twierdzenia:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2 + 2 = 5$.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Twierdzenia odwrotne do powyższych:

Converse

Twierdzenia:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2 + 2 = 5$.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Twierdzenia odwrotne do powyższych:

- Jeśli $2 + 2 = 5$, to Ziemia jest płaska.

Converse

Twierdzenia:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2 + 2 = 5$.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Twierdzenia odwrotne do powyższych:

- Jeśli $2 + 2 = 5$, to Ziemia jest płaska.
- Jeśli funkcja jest ciągła, to jest też różniczkowalna.

Converse

Twierdzenia:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2 + 2 = 5$.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Twierdzenia odwrotne do powyższych:

- Jeśli $2 + 2 = 5$, to Ziemia jest płaska.
- Jeśli funkcja jest ciągła, to jest też różniczkowalna.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 6, to jest też podzielna przez 3.

Converse

Twierdzenia:

- Jeśli Ziemia jest płaska, to $2+2=5$.
- Jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest też ciągła.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 3, to jest też podzielna przez 6.

Twierdzenia odwrotne do powyższych:

- Jeśli $2+2=5$, to Ziemia jest płaska.
- Jeśli funkcja jest ciągła, to jest też różniczkowalna.
- Jeśli liczba jest podzielna przez 6, to jest też podzielna przez 3.

Powyższe przykłady jasno pokazują, że twierdzenia i twierdzenie do niego odwrotne nie są równoważne (jedno może być prawdziwe, a drugie fałszywe).

Zdania z kwantyfikatorami

Wiele zdań w matematyce zaczyna się od zwrotów "każda", "niektóre", "żadna" itp.
Przykłady:

- Każda liczba naturalna jest nieujemna.
- Iloczyn każdych dwóch liczb całkowitych jest całkowity.
- Istnieją dwie liczby całkowite, których iloraz nie jest liczbą całkowitą.
- Niektóre liczby naturalne są mniejsze od 0.
- Każda liczba pierwsza jest nieparzysta.

Zdania z kwantyfikatorami

Przeanalizujmy dwa ostanie przykłady:

Niektóre liczby naturalne są mniejsze od 0.

Zdania z kwantyfikatorami

Przeanalizujmy dwa ostanie przykłady:

Niektóre liczby naturalne są mniejsze od 0.

Zaprzeczeniem tego zdania będzie:

Zdania z kwantyfikatorami

Przeanalizujmy dwa ostanie przykłady:

Niektóre liczby naturalne są mniejsze od 0.

Zaprzeczeniem tego zdania będzie:

Każda liczba naturalna jest nie mniejsza od 0.

Zaprzeczenie jest prawdziwe, a więc nasze oryginalne zdanie było oczywiście fałszywe.

Zdania z kwantyfikatorami

Każda liczba pierwsza jest nieparzysta

Zdania z kwantyfikatorami

Każda liczba pierwsza jest nieparzysta

Zaprzeczeniem tego zdania będzie:

Zdania z kwantyfikatorami

Każda liczba pierwsza jest nieparzysta

Zaprzeczeniem tego zdania będzie:

Istnieje liczba pierwsza, która jest parzysta

Zaprzeczenie jest prawdziwe (2 jest taką liczbą), a więc nasze oryginalne zdanie było fałszywe.

Zdania z kwantyfikatorami

Zdania postaci:

Istnieje taka liczba, że p.

negujemy:

*Każda liczba jest **nie** p.*

Zdania z kwantyfikatorami

Zdania postaci:

Każda liczba jest p.

negujemy:

Istnieje liczba, która jest ***nie*** *p.*

Na wejściówkę trzeba umieć ocenić prawdziwość zdania warunkowego, odwrotnego do niego, a także zdania z kwantyfikatorem, a w przypadku fałszywych zdań wskazać kontrprzykłądy.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.