

# Przesunięcia równoległe

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$  musimy umieć naszkicować wykresy funkcji  $g(x) = f(x \pm a) \pm b$ , gdzie  $a$  i  $b$  to stałe.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina:  $x \in \mathbb{R}$ . Zbiór wartości  $y \in \mathbb{R}$ .

## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina:  $x \in \mathbb{R}$ . Zbiór wartości  $y \in \mathbb{R}$ .

Miejsca zerowe:

## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina:  $x \in \mathbb{R}$ . Zbiór wartości  $y \in \mathbb{R}$ .

Miejsca zerowe:  $x = -1, x = 1, x = 2$ .

## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina:  $x \in \mathbb{R}$ . Zbiór wartości  $y \in \mathbb{R}$ .

Miejsca zerowe:  $x = -1, x = 1, x = 2$ .

Przecięcie z osią OY:



## Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina:  $x \in \mathbb{R}$ . Zbiór wartości  $y \in \mathbb{R}$ .

Miejsca zerowe:  $x = -1, x = 1, x = 2$ .

Przecięcie z osią OY:  $(0, 2)$ .

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod  $f(x)$ )

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla  $a$ . Proszę go dodać.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod  $f(x)$ )

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla  $a$ . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $g(x)$ .

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod  $f(x)$ )

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla  $a$ . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $g(x)$ .

Gdy  $a = 0$ , to  $g(x) = f(x)$  i wykresy się pokrywają.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod  $f(x)$ )

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla  $a$ . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $g(x)$ .

Gdy  $a = 0$ , to  $g(x) = f(x)$  i wykresy się pokrywają. Gdy  $a = 2$ , to wykres funkcji  $g(x)$  powstał z przesunięcia wykresu funkcji  $f(x)$  o dwie jednostki do góry.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod  $f(x)$ )

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla  $a$ . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $g(x)$ .

Gdy  $a = 0$ , to  $g(x) = f(x)$  i wykresy się pokrywają. Gdy  $a = 2$ , to wykres funkcji  $g(x)$  powstał z przesunięcia wykresu funkcji  $f(x)$  o dwie jednostki do góry. Gdy  $a = -3$ , to wykres funkcji  $g(x)$  powstał z przesunięcia wykresu funkcji  $f(x)$  o trzy jednostki w dół.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ( $g(x)$  można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla  $b$ .

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ( $g(x)$  można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla  $b$ .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $h(x)$ .



## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ( $g(x)$  można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla  $b$ .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $h(x)$ .

Gdy  $b = 0$ , to oczywiście  $h(x) = f(x)$  i wykresy się pokrywają.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ( $g(x)$  można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla  $b$ .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $h(x)$ .

Gdy  $b = 0$ , to oczywiście  $h(x) = f(x)$  i wykresy się pokrywają. Gdy  $b = 2$ , to wykres funkcji  $h(x)$  powstał z przesunięcia wykresu funkcji  $f(x)$  o dwie jednostki **w lewo**.

## Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ( $g(x)$  można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla  $b$ .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji  $h(x)$ .

Gdy  $b = 0$ , to oczywiście  $h(x) = f(x)$  i wykresy się pokrywają. Gdy  $b = 2$ , to wykres funkcji  $h(x)$  powstał z przesunięcia wykresu funkcji  $f(x)$  o dwie jednostki **w lewo**. Gdy  $b = -3$ , to wykres funkcji  $g(x)$  powstał z przesunięcia wykresu funkcji  $f(x)$  o trzy jednostki **w prawo**.

# Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

# Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

- wykres funkcji  $f(x) + 2$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor  $[0, 2]$ ,

## Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

- wykres funkcji  $f(x) + 2$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor  $[0, 2]$ ,
- wykres funkcji  $f(x) - 8$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor  $[0, -8]$ ,

## Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

- wykres funkcji  $f(x) + 2$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor  $[0, 2]$ ,
- wykres funkcji  $f(x) - 8$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor  $[0, -8]$ ,
- wykres funkcji  $f(x + 13)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor  $[-13, 0]$ ,

## Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

- wykres funkcji  $f(x) + 2$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor  $[0, 2]$ ,
- wykres funkcji  $f(x) - 8$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor  $[0, -8]$ ,
- wykres funkcji  $f(x + 13)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor  $[-13, 0]$ ,
- wykres funkcji  $f(x - 1)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 1 w prawo, czyli o wektor  $[1, 0]$ ,



## Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

- wykres funkcji  $f(x) + 2$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor  $[0, 2]$ ,
- wykres funkcji  $f(x) - 8$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor  $[0, -8]$ ,
- wykres funkcji  $f(x + 13)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor  $[-13, 0]$ ,
- wykres funkcji  $f(x - 1)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 1 w prawo, czyli o wektor  $[1, 0]$ ,

## Podsumowanie

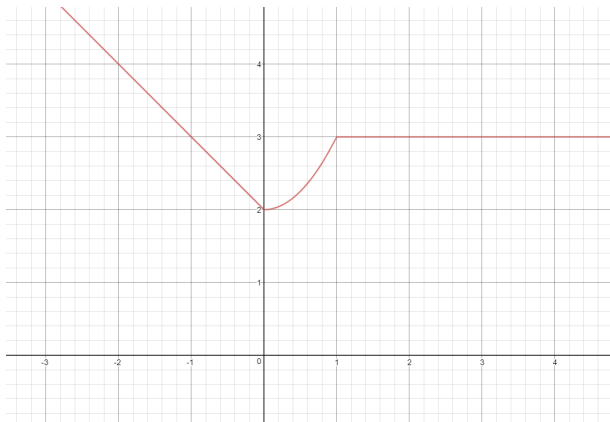
Mając dany wykres funkcji  $f(x)$ :

- wykres funkcji  $f(x) + 2$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor  $[0, 2]$ ,
- wykres funkcji  $f(x) - 8$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor  $[0, -8]$ ,
- wykres funkcji  $f(x + 13)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor  $[-13, 0]$ ,
- wykres funkcji  $f(x - 1)$ , to wykres  $f(x)$  przesunięty o 1 w prawo, czyli o wektor  $[1, 0]$ ,

Uwaga na znaki. Może się wydawać, że w trzecim i czwartym wypadku jest coś odwrotnie. Wyjaśnimy to na zajęciach.

# Przykład 1

Diagram przedstawia wykres funkcji  $f(x)$



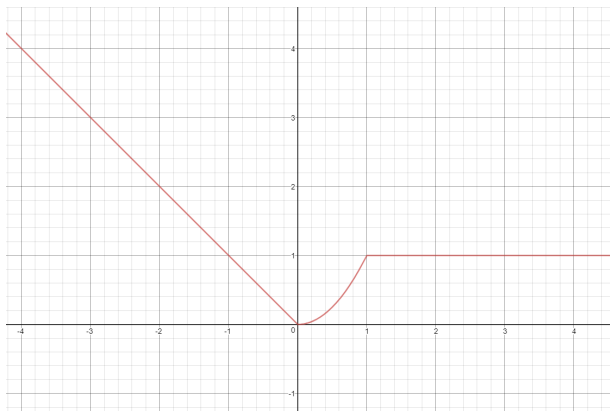
Naszkiuj funkcje  $f(x) - 2$  oraz  $f(x + 1)$ .

# Przykład 1

$f(x) - 2$  to przesunięcie wykresu  $f$  o 2 jednostki w dół:

# Przykład 1

$f(x) - 2$  to przesunięcie wykresu  $f$  o 2 jednostki w dół:

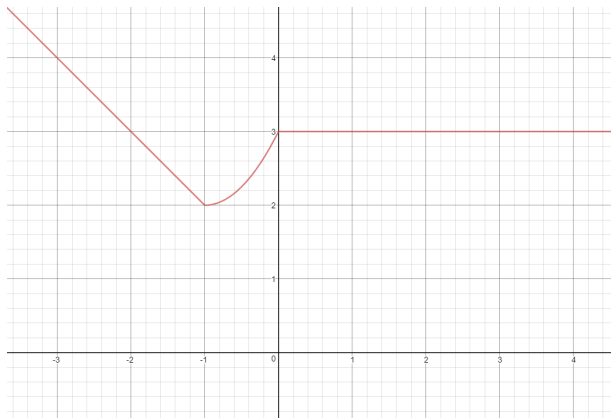


# Przykład 1

$f(x + 1)$  to przesunięcie wykresu  $f$  o 1 jednostkę w lewo:

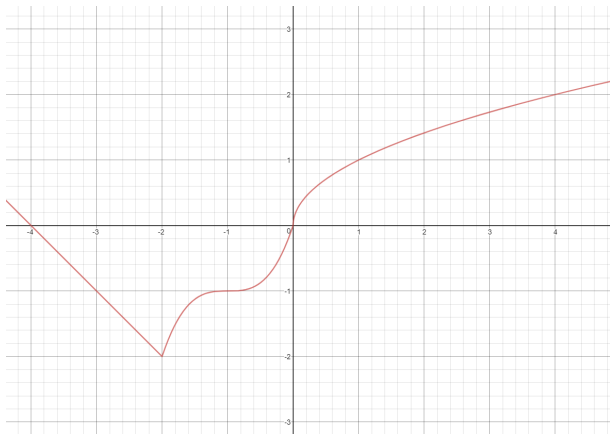
# Przykład 1

$f(x + 1)$  to przesunięcie wykresu  $f$  o 1 jednostkę w lewo:



## Przykład 2

Diagram przedstawia wykres funkcji  $f(x)$



Naszkićuj funkcję  $f(x - 2) + 1$ .

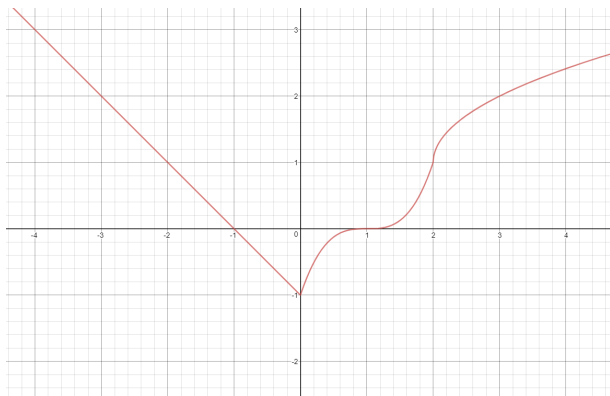


## Przykład 2

$f(x - 2) + 1$  to przesunięcie wykresu  $f$  o 1 jednostkę do góry i o 2 jednostki w prawo:

## Przykład 2

$f(x - 2) + 1$  to przesunięcie wykresu  $f$  o 1 jednostkę do góry i o 2 jednostki w prawo:



## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ .

## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .

## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .
- b)  $g(x) = f(x - 5) + 22$ .

## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .
- b)  $g(x) = f(x - 5) + 22$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to  $[5, 22]$ .

## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .
- b)  $g(x) = f(x - 5) + 22$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to  $[5, 22]$ .
- c)  $g(x) = f(x - 3) - 13$ .

## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .
- b)  $g(x) = f(x - 5) + 22$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to  $[5, 22]$ .
- c)  $g(x) = f(x - 3) - 13$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 13 w dół oraz o 3 w prawo. Szukany wektor to  $[3, -13]$ .



## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .
- b)  $g(x) = f(x - 5) + 22$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to  $[5, 22]$ .
- c)  $g(x) = f(x - 3) - 13$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 13 w dół oraz o 3 w prawo. Szukany wektor to  $[3, -13]$ .
- d)  $g(x) = f(x + 11) - 11$ .

## Przykład 3

Dla podanych funkcji  $g(x)$  podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji  $f(x)$ , by otrzymać wykres funkcji  $g(x)$ .

- a)  $g(x) = f(x + 1) + 1$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to  $[-1, 1]$ .
- b)  $g(x) = f(x - 5) + 22$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to  $[5, 22]$ .
- c)  $g(x) = f(x - 3) - 13$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 13 w dół oraz o 3 w prawo. Szukany wektor to  $[3, -13]$ .
- d)  $g(x) = f(x + 11) - 11$ . Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 11 w dół oraz o 11 w lewo. Szukany wektor to  $[-11, -11]$ .

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

a)  $[3, 3]$

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b)  $[-1, 2]$

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b)  $[-1, 2]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b)  $[-1, 2]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c)  $[-5, -13]$

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b)  $[-1, 2]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c)  $[-5, -13]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 13 w dół oraz o 5 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 5} - 13$



## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b)  $[-1, 2]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c)  $[-5, -13]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 13 w dół oraz o 5 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 5} - 13$
- d)  $[7, -2]$

## Przykład 4

Dana jest funkcja  $f(x) = \sqrt{x}$ . Zapisz wzór funkcji  $g(x)$ , której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a)  $[3, 3]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b)  $[-1, 2]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c)  $[-5, -13]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 13 w dół oraz o 5 w lewo, czyli  $g(x) = \sqrt{x + 5} - 13$
- d)  $[7, -2]$  Wykres funkcji  $f$  został przesunięty o 2 w dół oraz o 7 w prawo, czyli  $g(x) = \sqrt{x - 7} - 2$

# Wejściówka

Na wejściówkę trzeba umieć przekształcić dany wykres o przesunięcie równoległe oraz zapisać wektor mając wzór i wzór mając wektor.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na [T.J.Lechowski@gmail.com](mailto:T.J.Lechowski@gmail.com).