

# Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

Musimy znać wartości funkcji  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$  dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ .

Na następnych slajdach omówione obliczymy te wartości korzystając z własności trójkątów charakterystycznych.

## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

Trójkąt o kątach  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

Trójkąt o kątach  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

Zastanów się, dlaczego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

Trójkąt o kątach  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

Zastanów się, dlaczego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

Podpowiedź:

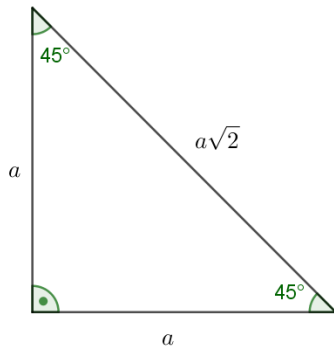
## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

Trójkąt o kątach  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

Zastanów się, dlaczego przeciwprostokątna jest  $\sqrt{2}$  razy dłuższa od przyprostokątnej.

Podpowiedź: wykorzystaj twierdzenie Pitagorasa.

# Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$



# Trójkąt $45^\circ$ - $45^\circ$ - $90^\circ$



## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uwaga: zauważ, że nie ma znaczenia, który kąt  $45^\circ$  wybierzemy, w obu przypadkach  $\sin$  i  $\cos$  będą wynosiły tyle samo.

## Trójkąt $45^\circ-45^\circ-90^\circ$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uwaga: zauważ, że nie ma znaczenia, który kąt  $45^\circ$  wybierzemy, w obu przypadkach  $\sin$  i  $\cos$  będą wynosiły tyle samo.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

## Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uwaga: zauważ, że nie ma znaczenia, który kąt 45° wybierzemy, w obu przypadkach sin i cos będą wynosiły tyle samo.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

## Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

Trójkąt o kątach  $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$  to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta  $30^\circ$ ) oznaczymy literą  $a$ , to jego pozostałe boki będą miały długości  $a\sqrt{3}$  (bok naprzeciwko kąta  $60^\circ$ ) oraz  $2a$  (przeciwprostokątna).

## Trójkąt $30^\circ-60^\circ-90^\circ$

Trójkąt o kątach  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta  $30^\circ$ ) oznaczymy literą  $a$ , to jego pozostałe boki będą miały długości  $a\sqrt{3}$  (bok naprzeciwko kąta  $60^\circ$ ) oraz  $2a$  (przeciwprostokątna).

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić powyższe zależności.

## Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

Trójkąt o kątach  $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$  to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta  $30^\circ$ ) oznaczymy literą  $a$ , to jego pozostałe boki będą miały długości  $a\sqrt{3}$  (bok naprzeciwko kąta  $60^\circ$ ) oraz  $2a$  (przeciwprostokątna).

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić powyższe zależności.

Podpowiedź:



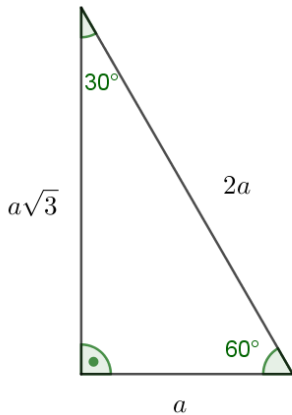
## Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

Trójkąt o kątach  $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$  to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta  $30^\circ$ ) oznaczymy literą  $a$ , to jego pozostałe boki będą miały długości  $a\sqrt{3}$  (bok naprzeciwko kąta  $60^\circ$ ) oraz  $2a$  (przeciwprostokątna).

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić powyższe zależności.

Podpowiedź: zacznij od narysowania trójkąta równobocznego o boku  $2a$  i podziel ten trójkąt na pół rysując wysokość z jednego z wierzchołków.

# Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$



# Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

## Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

## Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

## Trójkąt $30^\circ$ - $60^\circ$ - $90^\circ$

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$



## Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

## Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

# Tabela z wartościami

	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

# Zadanie

Na wejściówce będzie zadanie podobne do następującego:

# Zadanie

Na wejściówce będzie zadanie podobne do następującego:

Oblicz:

$$4 \sin 30^\circ + (2 \cos 30^\circ)^2 - (5 \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \times \sin 60^\circ)$$

# Zadanie

$$4 \sin 30^\circ + (2 \cos 30^\circ)^2 - (5 \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \times \sin 60^\circ) =$$

## Zadanie

$$\begin{aligned} & 4 \sin 30^\circ + (2 \cos 30^\circ)^2 - (5 \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \times \sin 60^\circ) = \\ & = 4 \times \frac{1}{2} + \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \end{aligned}$$

## Zadanie

$$\begin{aligned} & 4 \sin 30^\circ + (2 \cos 30^\circ)^2 - (5 \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \times \sin 60^\circ) = \\ & = 4 \times \frac{1}{2} + \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ & = 2 + 3 - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{19}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6} \end{aligned}$$



W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na [T.J.Lechowski@gmail.com](mailto:T.J.Lechowski@gmail.com).