# Twierdzenie cosinusów

Musimy znać twierdzenie cosinusów i umieć je zastosować do obliczania boków oraz kątów trójkąta.

Na następnych slajdach omówione zostaną trzy przykłady zastosowania twierdzenia cosinusów.

# Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

# Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Uwaga: $\alpha$ to kąt na przeciwko boku $a$, $\beta$ to kąt na przeciwko boku $b$, $\gamma$ to kąt na przeciwko boku $c$.

# Twierdzenie cosinusów

Gdy szukamy kątów, powyższe równania można przekształcić do postaci:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

# Przykład 1

W trójkącie $ABC$ mamy dane $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$. Oblicz długość boku $AC$.

# Przykład 1

W trójkącie $ABC$ mamy dane $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$. Oblicz długość boku $AC$.

Ważna obserwacja: bok $AC$ leży na przeciwko kąta $\angle ABC$.

# Przykład 1

W trójkącie $ABC$ mamy dane $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$. Oblicz długość boku $AC$.

Ważna obserwacja: bok $AC$ leży na przeciwko kąta $\angle ABC$.

Przy standardowych oznaczeniach, z twierdzenia cosinusów mamy:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\
b^2 &= 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 120^\circ \\
b^2 &= 25 + 64 - 80 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
b^2 &= 129 \\
b &= \sqrt{129}
\end{aligned}
$$

# Przykład 2

W trójkącie $ABC$ mamy dane $|AB| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$ i $|BC| = \sqrt{10}$. Oblicz miarę kąta $\angle BAC$.

# Przykład 2

W trójkącie $ABC$ mamy dane $|AB| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$ i $|BC| = \sqrt{10}$. Oblicz miarę kąta $\angle BAC$.

Ważna obserwacja: kąt $\angle BAC$ leży na przeciwko boku $BC$.

# Przykład 2

W trójkącie $ABC$ mamy dane $|AB| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$ i $|BC| = \sqrt{10}$. Oblicz miarę kąta $\angle BAC$.

Ważna obserwacja: kąt $\angle BAC$ leży na przeciwko boku $BC$.

Przy standardowych oznaczeniach, z twierdzenia cosinusów mamy:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{(3\sqrt{2})^2 + 4^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 4 \times 3\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{18 + 16 - 10}{24\sqrt{2}}$$

# Przykład 2

Upraszczając otrzymujemy:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha = 45^\circ$$

# Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

# Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

Wystarczy wykazać, że *cosinus* kąta na przeciwko najdłuższego z boków jest ujemny.

# Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

Wystarczy wykazać, że *cosinus* kąta na przeciwko najdłuższego z boków jest ujemny. (Dlaczego?)

# Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

Wystarczy wykazać, że *cosinus* kąta na przeciwko najdłuższego z boków jest ujemny. (Dlaczego?)

Niech $\alpha$ to kąt na przeciwko boku o długości 4. Wtedy:

$$\cos\alpha = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3}$$
$$\cos\alpha = \frac{4 + 9 - 16}{12}$$
$$\cos\alpha = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$\square$

Na wejściówce będzie zadania podobne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.