Twierdzenie sinusów

Musimy znać twierdzenie sinusów i umieć je zastosować do obliczania promienia okręgu opisanego na trójkącie, boków trójkąta, kątów trójkąta.

Na następnych slajdach omówione zostaną trzy przykłady zastosowania twierdzenia sinusów.

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Uwaga: α to kąt na przeciwko boku a, β to kąt na przeciwko boku b, γ to kąt na przeciwko boku c, R to promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Oznaczenia

Standardowo w trójkącie ABC, bok na przeciwko wierzchołka A (czyli bok BC) oznaczamy literą a, a kąt przy tym wierzchołku literą α. Analogicznie dla wierzchołka B, będą to b (bok AC) i β. Dla wierzchołka C: c (bok AB) i γ.

Pole trójkąta

W książce na stronach 250 - 251 omówiony jest dowód twierdzenia sinusów.

Pole trójkąta

W książce na stronach 250 - 251 omówiony jest dowód twierdzenia sinusów. Przyjrzymy się innemu dowodowi pierwszej części twierdzenia i przy okazji wyprowadzimy dodatkowy wzór na pole trójkąta.

Pole trójkąta

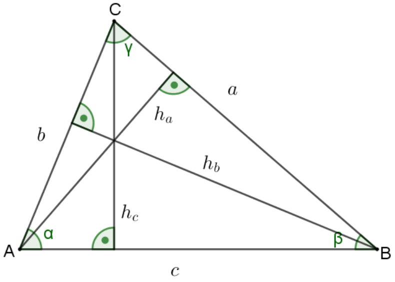
W książce na stronach 250 - 251 omówiony jest dowód twierdzenia sinusów. Przyjrzymy się innemu dowodowi pierwszej części twierdzenia i przy okazji wyprowadzimy dodatkowy wzór na pole trójkąta.

Udowodnimy, że

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Pole trójkąta

Rozważmy trójkąt ABC, jak na rysunku.



$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times h_b}{2} = \frac{c \times h_c}{2}$$

Pole trójkąta

Wykorzystując funkcje trygonometryczne mamy:

$$h_a = c \times \sin\beta$$
$$h_b = a \times \sin\gamma$$
$$h_c = b \times \sin\alpha$$

Wykorzystując wzór na pole otrzymujemy:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \times c \times \sin\beta}{2} = \frac{b \times a \times \sin\gamma}{2} = \frac{c \times b \times \sin\alpha}{2}$$

Pole trójkąta

Mamy dodatkowy wzór na pole trójkąta:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \times c \times \sin\beta}{2} = \frac{b \times a \times \sin\gamma}{2} = \frac{c \times b \times \sin\alpha}{2}$$

Pole trójkąta

Mamy dodatkowy wzór na pole trójkąta:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \times c \times \sin\beta}{2} = \frac{b \times a \times \sin\gamma}{2} = \frac{c \times b \times \sin\alpha}{2}$$

Pole to połowa iloczynu długości dwóch boków i sinusa kąta **pomiędzy** nimi.

Pole trójkąta

Mnożąc prawą część wzoru, czyli:

$$\frac{a \times c \times \sin\beta}{2} = \frac{b \times a \times \sin\gamma}{2} = \frac{c \times b \times \sin\alpha}{2}$$

przez $\dfrac{2}{a \times b \times c}$ otrzymujemy:

Pole trójkąta

Mnożąc prawą część wzoru, czyli:

$$\frac{a \times c \times \sin\beta}{2} = \frac{b \times a \times \sin\gamma}{2} = \frac{c \times b \times \sin\alpha}{2}$$

przez $\dfrac{2}{a \times b \times c}$ otrzymujemy:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}$$

$\square$

Spróbuj samodzielnie przeprowadzić ten dowód, gdy nasz trójkąt ABC nie jest ostrokątny.

Spróbuj samodzielnie przeprowadzić ten dowód, gdy nasz trójkąt ABC nie jest ostrokątny.

Będzie wtedy trzeba wykorzystać wzór redukcyjny:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

Przykład 1

W trójkącie ABC mamy dane $|AB| = 3\sqrt{2}$, $\angle ACB = 135^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Przykład 1

W trójkącie ABC mamy dane $|AB| = 3\sqrt{2}$, $\angle ACB = 135^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ważna obserwacja: bok AB leży na przeciwko kąta $\angle ACB$.

Przykład 1

W trójkącie ABC mamy dane $|AB| = 3\sqrt{2}$, $\angle ACB = 135^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ważna obserwacja: bok AB leży na przeciwko kąta $\angle ACB$.

Wprowadźmy oznaczenia: $AB = c$, $\angle ACB = \gamma$.

Przykład 1

W trójkącie ABC mamy dane $|AB| = 3\sqrt{2}$, $\angle ACB = 135^\circ$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ważna obserwacja: bok AB leży na przeciwko kąta $\angle ACB$.

Wprowadźmy oznaczenia: $AB = c$, $\angle ACB = \gamma$. Mamy wtedy:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Przykład 1

$$c = 3\sqrt{2}$$

$$\sin\gamma = \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mamy więc:

$$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

Przykład 2

Dany jest trójkąt ABC taki, że $AC = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$ oraz $\angle BAC = 45^\circ$. Oblicz długość boku BC.

Przykład 2

Dany jest trójkąt ABC taki, że $AC = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$ oraz $\angle BAC = 45^\circ$. Oblicz długość boku BC.

Wprowadzamy standardowe oznaczenia: $AC = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$ oraz $BC = a$.

Przykład 2

Dany jest trójkąt ABC taki, że $AC = 5$, $\angle ABC = 120^\circ$ oraz $\angle BAC = 45^\circ$. Oblicz długość boku BC.

Wprowadzamy standardowe oznaczenia: $AC = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$ oraz $BC = a$.

Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Przykład 2

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$a = \frac{b \times \sin \alpha}{\sin \beta}$$

Przykład 2

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$a = \frac{b \times \sin\alpha}{\sin\beta}$$

podstawiając wartości otrzymujemy:

Przykład 2

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$a = \frac{b \times \sin\alpha}{\sin\beta}$$

podstawiając wartości otrzymujemy:

$$a = \frac{5 \times \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Przykład 3

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że $BC = 7\sqrt{2}$, $AC = 7$ oraz $\angle BAC = 45^\circ$. Oblicz miarę kąta $\angle ABC$.

Przykład 3

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że $BC = 7\sqrt{2}$, $AC = 7$ oraz $\angle BAC = 45^\circ$. Oblicz miarę kąta $\angle ABC$.

Wprowadzamy standardowe oznaczenia: $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$.

Przykład 3

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że $BC = 7\sqrt{2}$, $AC = 7$ oraz $\angle BAC = 45^\circ$. Oblicz miarę kąta $\angle ABC$.

Wprowadzamy standardowe oznaczenia: $BC = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$ oraz $\angle ABC = \beta$.

Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Przykład 3

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\sin\beta = \frac{b \times \sin\alpha}{a}$$

Przykład 3

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\sin\beta = \frac{b \times \sin\alpha}{a}$$

podstawiając wartości otrzymujemy:

Przykład 3

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\sin\beta = \frac{b \times \sin\alpha}{a}$$

podstawiając wartości otrzymujemy:

$$\sin\beta = \frac{7 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Przykład 3

Przekształcając ten wzór otrzymujemy

$$\sin\beta = \frac{b \times \sin\alpha}{a}$$

podstawiając wartości otrzymujemy:

$$\sin\beta = \frac{7 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Ponieważ β jest kątem ostrym i $\sin\beta = \frac{1}{2}$, to $\beta = 30^\circ$.

Na wejściówce będzie zadania podobne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.