

Wartość bezwzględna

Musimy umieć obliczyć wartość bezwzględną ze złożonych liczb oraz umieć rozwiązać proste równania z wartością bezwzględną.

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Co ta definicja oznacza?

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Co ta definicja oznacza? Jeśli mamy w środku wartości bezwzględnej liczbę nieujemną (np. 0, 31 lub $\sqrt{111}$), to wartość bezwzględna nic z tą liczbą nie robi. Czyli $|0| = 0$, $|31| = 31$ i $|\sqrt{111}| = \sqrt{111}$.

Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Co ta definicja oznacza? Jeśli mamy w środku wartości bezwzględnej liczbę nieujemną (np. 0, 31 lub $\sqrt{111}$), to wartość bezwzględna nic z tą liczbą nie robi. Czyli $|0| = 0$, $|31| = 31$ i $|\sqrt{111}| = \sqrt{111}$.

Jeśli natomiast w środku jest liczba ujemna (np. -13 lub $-\pi$) to wartość bezwzględna zmieni jej znak dostawiając dodatkowy minus (co sprawi, że liczba zmieni się na przeciwną). Czyli $|-13| = -(-13) = 13$ i $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c) $|3 - \sqrt{11}|$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c) $|3 - \sqrt{11}|$. Liczba $3 - \sqrt{11}$ jest ujemna, więc
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c) $|3 - \sqrt{11}|$. Liczba $3 - \sqrt{11}$ jest ujemna, więc
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

d) $|\sqrt{13} - 4|$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c) $|3 - \sqrt{11}|$. Liczba $3 - \sqrt{11}$ jest ujemna, więc
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

d) $|\sqrt{13} - 4|$. Liczba $\sqrt{13} - 4$ jest ujemna, więc
 $|\sqrt{13} - 4| = -(\sqrt{13} - 4) = -\sqrt{13} + 4$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c) $|3 - \sqrt{11}|$. Liczba $3 - \sqrt{11}$ jest ujemna, więc
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

d) $|\sqrt{13} - 4|$. Liczba $\sqrt{13} - 4$ jest ujemna, więc
 $|\sqrt{13} - 4| = -(\sqrt{13} - 4) = -\sqrt{13} + 4$

e) $|3\sqrt{2} - 4|$.

Przykłady 1

Oblicz:

- a) $|2 - \sqrt{3}|$. Liczba $2 - \sqrt{3}$ jest dodatnia, więc $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$
- b) $|2 - \sqrt{5}|$. Liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, więc
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$
- c) $|3 - \sqrt{11}|$. Liczba $3 - \sqrt{11}$ jest ujemna, więc
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$
- d) $|\sqrt{13} - 4|$. Liczba $\sqrt{13} - 4$ jest ujemna, więc
 $|\sqrt{13} - 4| = -(\sqrt{13} - 4) = -\sqrt{13} + 4$
- e) $|3\sqrt{2} - 4|$. Liczba $3\sqrt{2} - 4$ jest dodatnia, więc $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$

Przykład 2

Oblicz:

$$|2 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2|$$

$2 - \sqrt{2}$ jest liczbą dodatnią, natomiast $\sqrt{2} - 2$ ujemną. W związku z tym:

$$|2 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 2) = 4 - 2\sqrt{2}$$

Przykład 3

Oblicz:

$$|3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}|$$

$3 - \sqrt{10}$ i $\sqrt{10} - 4$ to liczby ujemne. $5 - \sqrt{10}$ jest liczbą dodatnią.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}| &= -(3 - \sqrt{10}) + (\sqrt{10} - 4) + 5 - \sqrt{10} \\ &= -2 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

Przykład 3

Oblicz:

$$|3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}|$$

$3 - \sqrt{10}$ i $\sqrt{10} - 4$ to liczby ujemne. $5 - \sqrt{10}$ jest liczbą dodatnią.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}| &= -(3 - \sqrt{10}) + (\sqrt{10} - 4) + 5 - \sqrt{10} \\ &= -2 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

Uwaga: przed $\sqrt{10} - 4$ jest +, gdyż wartość bezwzględna dostawi minus, a w równaniu już był minus.

Równania

Rozważmy równanie:

$$|x| = 2$$

Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste (we wszystkich kolejnych przykładach również).

Równania

Rozważmy równanie:

$$|x| = 2$$

Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste (we wszystkich kolejnych przykładach również). Wiemy, że wartość bezwzględna z dokładnie dwóch liczb wynosi 2: $|2| = |-2| = 2$, czyli zbiorem rozwiązań tego równania będzie zbiór $\{-2, 2\}$.

Równania

Rozważmy równanie:

$$|x| = 2$$

Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste (we wszystkich kolejnych przykładach również). Wiemy, że wartość bezwzględna z dokładnie dwóch liczb wynosi 2: $|2| = |-2| = 2$, czyli zbiorem rozwiązań tego równania będzie zbiór $\{-2, 2\}$.

Rozważmy kolejny przykład

$$3|x| - 1 = 8$$

Przekształcamy (dodając 1 i dzieląc na 3), by otrzymać:

$$|x| = 3$$

Zbiór rozwiązań: $\{-3, 3\}$

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$5|x| + 1 = 3$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$5|x| + 1 = 3$$

Przekształcamy (odejmując 1 i dzieląc przez 5), by otrzymać:

$$|x| = \frac{2}{5}$$

Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$5|x| + 1 = 3$$

Przekształcamy (odejmując 1 i dzieląc przez 5), by otrzymać:

$$|x| = \frac{2}{5}$$

Zbiór rozwiązań: $\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$.

Przykład 5 - super ważny

Rozwiąż równanie:

$$4|x| + 5 = 2$$

Przykład 5 - super ważny

Rozwiąż równanie:

$$4|x| + 5 = 2$$

Przekształcamy (odejmując 5 i dzieląc przez 3), by otrzymać:

$$|x| = -\frac{3}{4}$$

Przykład 5 - super ważny

Rozwiąż równanie:

$$4|x| + 5 = 2$$

Przekształcamy (odejmując 5 i dzieląc przez 3), by otrzymać:

$$|x| = -\frac{3}{4}$$

Zbiór rozwiązań: \emptyset . Powyższe równanie nie ma rozwiązań. Wartość bezwzględna z żadnej liczby nie jest ujemna.

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Wartość bezwzględna z $2x - 3$ wynosi 1, czyli $2x - 3 = -1$ lub $2x - 3 = 1$.

Rozwiązujemy oba równania i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 2$

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Wartość bezwzględna z $2x - 3$ wynosi 1, czyli $2x - 3 = -1$ lub $2x - 3 = 1$.

Rozwiązujemy oba równania i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 2$

Zbiór rozwiązań: $\{1, 2\}$.

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Wartość bezwzględna z $2x - 3$ wynosi 1, czyli $2x - 3 = -1$ lub $2x - 3 = 1$.

Rozwiązujemy oba równania i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 2$

Zbiór rozwiązań: $\{1, 2\}$.

Warto sprawdzić powyższe rozwiązania podstawiając do równania:

$$|2 \times 1 - 3| = |-1| = 1$$

$$|2 \times 2 - 3| = |1| = 1$$

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Wynika stąd, że $3x - 1 = -2$ lub $3x - 1 = 2$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 1$.

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Wynika stąd, że $3x - 1 = -2$ lub $3x - 1 = 2$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 1$.

Zbiór rozwiązań: $\{-\frac{1}{3}, 1\}$.

Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Wynika stąd, że $3x - 1 = -2$ lub $3x - 1 = 2$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 1$.

Zbiór rozwiązań: $\{-\frac{1}{3}, 1\}$.

Warto sprawdzić powyższe rozwiązania podstawiając do równania:

$$3|3 \times -\frac{1}{3} - 1| - 5 = 3 \times |-2| - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$$

$$3|3 \times 1 - 1| - 5 = 3 \times |2| - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$$

Przykład 7

Rozwiąż równanie:

$$2|5x + 11| + 8 = 5$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|5x + 11| = -\frac{3}{2}$$

Przykład 7

Rozwiąż równanie:

$$2|5x + 11| + 8 = 5$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|5x + 11| = -\frac{3}{2}$$

I koniec zabawy. Zbiór rozwiązań: \emptyset . Wartość bezwzględna z żadnej liczby nie jest ujemna.

Na wejściówkę trzeba umieć policzyć wartość bezwzględną z wyrażeń liczbowych oraz rozwiązać proste równania.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.