

# Wartość bezwzględna

Musimy umieć obliczyć wartość bezwzględną ze złożonych liczb oraz umieć rozwiązać proste równania z wartością bezwzględną.

## Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

## Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Co ta definicja oznacza?

## Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Co ta definicja oznacza? Jeśli mamy w środku wartości bezwzględnej liczbę nieujemną (np. 0, 31 lub  $\sqrt{111}$ ), to wartość bezwzględna nic z tą liczbą nie robi. Czyli  $|0| = 0$ ,  $|31| = 31$  i  $|\sqrt{111}| = \sqrt{111}$ .

## Definicja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Co ta definicja oznacza? Jeśli mamy w środku wartości bezwzględnej liczbę nieujemną (np. 0, 31 lub  $\sqrt{111}$ ), to wartość bezwzględna nic z tą liczbą nie robi. Czyli  $|0| = 0$ ,  $|31| = 31$  i  $|\sqrt{111}| = \sqrt{111}$ .

Jeśli natomiast w środku jest liczba ujemna (np.  $-13$  lub  $-\pi$ ) to wartość bezwzględna zmieni jej znak dostawiając dodatkowy minus (co sprawi, że liczba zmieni się na przeciwną). Czyli  $|-13| = -(-13) = 13$  i  $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$ .

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ .

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$



# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ .

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c)  $|3 - \sqrt{11}|$ .

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c)  $|3 - \sqrt{11}|$ . Liczba  $3 - \sqrt{11}$  jest ujemna, więc  
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c)  $|3 - \sqrt{11}|$ . Liczba  $3 - \sqrt{11}$  jest ujemna, więc  
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

d)  $|\sqrt{13} - 4|$ .

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c)  $|3 - \sqrt{11}|$ . Liczba  $3 - \sqrt{11}$  jest ujemna, więc  
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

d)  $|\sqrt{13} - 4|$ . Liczba  $\sqrt{13} - 4$  jest ujemna, więc  
 $|\sqrt{13} - 4| = -(\sqrt{13} - 4) = -\sqrt{13} + 4$

# Przykłady 1

Oblicz:

a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$

b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$

c)  $|3 - \sqrt{11}|$ . Liczba  $3 - \sqrt{11}$  jest ujemna, więc  
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$

d)  $|\sqrt{13} - 4|$ . Liczba  $\sqrt{13} - 4$  jest ujemna, więc  
 $|\sqrt{13} - 4| = -(\sqrt{13} - 4) = -\sqrt{13} + 4$

e)  $|3\sqrt{2} - 4|$ .

# Przykłady 1

Oblicz:

- a)  $|2 - \sqrt{3}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{3}$  jest dodatnia, więc  $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$
- b)  $|2 - \sqrt{5}|$ . Liczba  $2 - \sqrt{5}$  jest ujemna, więc  
 $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5}$
- c)  $|3 - \sqrt{11}|$ . Liczba  $3 - \sqrt{11}$  jest ujemna, więc  
 $|3 - \sqrt{11}| = -(3 - \sqrt{11}) = -3 + \sqrt{11}$
- d)  $|\sqrt{13} - 4|$ . Liczba  $\sqrt{13} - 4$  jest ujemna, więc  
 $|\sqrt{13} - 4| = -(\sqrt{13} - 4) = -\sqrt{13} + 4$
- e)  $|3\sqrt{2} - 4|$ . Liczba  $3\sqrt{2} - 4$  jest dodatnia, więc  $|3\sqrt{2} - 4| = 3\sqrt{2} - 4$



## Przykład 2

Oblicz:

$$|2 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2|$$

$2 - \sqrt{2}$  jest liczbą dodatnią, natomiast  $\sqrt{2} - 2$  ujemną. W związku z tym:

$$|2 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 2) = 4 - 2\sqrt{2}$$

## Przykład 3

Oblicz:

$$|3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}|$$

$3 - \sqrt{10}$  i  $\sqrt{10} - 4$  to liczby ujemne.  $5 - \sqrt{10}$  jest liczbą dodatnią.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}| &= -(3 - \sqrt{10}) + (\sqrt{10} - 4) + 5 - \sqrt{10} \\ &= -2 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

## Przykład 3

Oblicz:

$$|3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}|$$

$3 - \sqrt{10}$  i  $\sqrt{10} - 4$  to liczby ujemne.  $5 - \sqrt{10}$  jest liczbą dodatnią.

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |3 - \sqrt{10}| - |\sqrt{10} - 4| + |5 - \sqrt{10}| &= -(3 - \sqrt{10}) + (\sqrt{10} - 4) + 5 - \sqrt{10} \\ &= -2 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

Uwaga: przed  $\sqrt{10} - 4$  jest +, gdyż wartość bezwzględna dostawi minus, a w równaniu już był minus.

# Równania

Rozważmy równanie:

$$|x| = 2$$

Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste (we wszystkich kolejnych przykładach również).

# Równania

Rozważmy równanie:

$$|x| = 2$$

Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste (we wszystkich kolejnych przykładach również). Wiemy, że wartość bezwzględna z dokładnie dwóch liczb wynosi 2:  $|2| = |-2| = 2$ , czyli zbiorem rozwiązań tego równania będzie zbiór  $\{-2, 2\}$ .

# Równania

Rozważmy równanie:

$$|x| = 2$$

Dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste (we wszystkich kolejnych przykładach również). Wiemy, że wartość bezwzględna z dokładnie dwóch liczb wynosi 2:  $|2| = |-2| = 2$ , czyli zbiorem rozwiązań tego równania będzie zbiór  $\{-2, 2\}$ .

Rozważmy kolejny przykład

$$3|x| - 1 = 8$$

Przekształcamy (dodając 1 i dzieląc na 3), by otrzymać:

$$|x| = 3$$

Zbiór rozwiązań:  $\{-3, 3\}$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$5|x| + 1 = 3$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$5|x| + 1 = 3$$

Przekształcamy (odejmując 1 i dzieląc przez 5), by otrzymać:

$$|x| = \frac{2}{5}$$



## Przykład 4

Rozwiąż równanie:

$$5|x| + 1 = 3$$

Przekształcamy (odejmując 1 i dzieląc przez 5), by otrzymać:

$$|x| = \frac{2}{5}$$

Zbiór rozwiązań:  $\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$ .

## Przykład 5 - super ważny

Rozwiąż równanie:

$$4|x| + 5 = 2$$

## Przykład 5 - super ważny

Rozwiąż równanie:

$$4|x| + 5 = 2$$

Przekształcamy (odejmując 5 i dzieląc przez 3), by otrzymać:

$$|x| = -\frac{3}{4}$$

## Przykład 5 - super ważny

Rozwiąż równanie:

$$4|x| + 5 = 2$$

Przekształcamy (odejmując 5 i dzieląc przez 3), by otrzymać:

$$|x| = -\frac{3}{4}$$

Zbiór rozwiązań:  $\emptyset$ . Powyższe równanie nie ma rozwiązań. Wartość bezwzględna z żadnej liczby nie jest ujemna.

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Wartość bezwzględna z  $2x - 3$  wynosi 1, czyli  $2x - 3 = -1$  lub  $2x - 3 = 1$ .

Rozwiązujemy oba równania i otrzymujemy  $x = 1$  lub  $x = 2$

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Wartość bezwzględna z  $2x - 3$  wynosi 1, czyli  $2x - 3 = -1$  lub  $2x - 3 = 1$ .

Rozwiązujemy oba równania i otrzymujemy  $x = 1$  lub  $x = 2$

Zbiór rozwiązań:  $\{1, 2\}$ .

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$|2x - 3| = 1$$

Wartość bezwzględna z  $2x - 3$  wynosi 1, czyli  $2x - 3 = -1$  lub  $2x - 3 = 1$ .

Rozwiązujemy oba równania i otrzymujemy  $x = 1$  lub  $x = 2$

Zbiór rozwiązań:  $\{1, 2\}$ .

Warto sprawdzić powyższe rozwiązania podstawiając do równania:

$$|2 \times 1 - 3| = |-1| = 1$$

$$|2 \times 2 - 3| = |1| = 1$$



## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Wynika stąd, że  $3x - 1 = -2$  lub  $3x - 1 = 2$ . Rozwiązujemy i otrzymujemy  $x = -\frac{1}{3}$  lub  $x = 1$ .

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Wynika stąd, że  $3x - 1 = -2$  lub  $3x - 1 = 2$ . Rozwiązujemy i otrzymujemy  $x = -\frac{1}{3}$  lub  $x = 1$ .

Zbiór rozwiązań:  $\{-\frac{1}{3}, 1\}$ .

## Przykład 6

Rozwiąż równanie:

$$3|3x - 1| - 5 = 1$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|3x - 1| = 2$$

Wynika stąd, że  $3x - 1 = -2$  lub  $3x - 1 = 2$ . Rozwiązujemy i otrzymujemy  $x = -\frac{1}{3}$  lub  $x = 1$ .

Zbiór rozwiązań:  $\{-\frac{1}{3}, 1\}$ .

Warto sprawdzić powyższe rozwiązania podstawiając do równania:

$$3|3 \times -\frac{1}{3} - 1| - 5 = 3 \times |-2| - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$$

$$3|3 \times 1 - 1| - 5 = 3 \times |2| - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1$$

## Przykład 7

Rozwiąż równanie:

$$2|5x + 11| + 8 = 5$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|5x + 11| = -\frac{3}{2}$$

## Przykład 7

Rozwiąż równanie:

$$2|5x + 11| + 8 = 5$$

Przekształcamy, by otrzymać:

$$|5x + 11| = -\frac{3}{2}$$

I koniec zabawy. Zbiór rozwiązań:  $\emptyset$ . Wartość bezwzględna z żadnej liczby nie jest ujemna.

Na wejściówkę trzeba umieć policzyć wartość bezwzględną z wyrażeń liczbowych oraz rozwiązać proste równania.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na [T.J.Lechowski@gmail.com](mailto:T.J.Lechowski@gmail.com).