Funkcje kwadratowe

Musimy umieć przekształcić wykres funkcji $y = x^2$ w wykres dowolnej funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$.

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Musimy mieć opanowane wzory skróconego mnożenia (ale to jest prościutkie).

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Musimy mieć opanowane wzory skróconego mnożenia (ale to jest prościutkie). Zapisujemy:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1$$

Przykład 1

Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Musimy mieć opanowane wzory skróconego mnożenia (ale to jest prościutkie). Zapisujemy:

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$$

Teraz widzimy, że wykres funkcji $f(x)$ powstał z funkcji x^2 po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [-2, -1]$.

Przykład 2

Rozważamy $g(x) = x^2 - 8x + 10$.

Przykład 2

Rozważamy $g(x) = x^2 - 8x + 10$.

Zapisujemy:

$$g(x) = x^2 - 8x + 10 = x^2 - 8x + 16 - 6 = (x-4)^2 - 6$$

Przykład 2

Rozważamy $g(x) = x^2 - 8x + 10$.

Zapisujemy:

$$g(x) = x^2 - 8x + 10 = x^2 - 8x + 16 - 6 = (x-4)^2 - 6$$

Teraz widzimy, że wykres funkcji $g(x)$ powstał z funkcji x^2 po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [4, -6]$.

Przykład 3

Rozważamy $h(x) = x^2 + x + 1$.

Przykład 3

Rozważamy $h(x) = x^2 + x + 1$.

Zapisujemy:

$$h(x) = x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Przykład 3

Rozważamy $h(x) = x^2 + x + 1$.

Zapisujemy:

$$h(x) = x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Teraz widzimy, że wykres funkcji $h(x)$ powstał z funkcji x^2 po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

Podsumowanie

Dla funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ postępujemy następująco:

$$f(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Podsumowanie

Dla funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ postępujemy następująco:

$$f(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Czyli przesuwamy wykres x^2 o wektor $\vec{u} = [-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4}]$.

Podsumowanie

Dla funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ postępujemy następująco:

$$f(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Czyli przesuwamy wykres x^2 o wektor $\vec{u} = [-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4}]$.

Nasuwa się oczywiste pytanie: a co jeśli współczynnik przy x^2 nie jest jeden (czyli mamy np. funkcję $2x^2 + 12x + 3$)?

Podsumowanie

Dla funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ postępujemy następująco:

$$f(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

Czyli przesuwamy wykres x^2 o wektor $\vec{u} = [-\frac{b}{2}, c - \frac{b^2}{4}]$.

Nasuwa się oczywiste pytanie: a co jeśli współczynnik przy x^2 nie jest jeden (czyli mamy np. funkcję $2x^2 + 12x + 3$)? Teraz zajmiemy się takimi przykładami, ale różnica jest niewielka.

Przykład 4

Rozważamy $f(x) = 2x^2 + 12x + 3$.

Przykład 4

Rozważamy $f(x) = 2x^2 + 12x + 3$.

Zapisujemy:

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 3 = 2\left(x^2 + 6x + \frac{3}{2}\right)$$

Czyli po prostu wyciągamy współczynnik przy x^2 przed nawias, a z tym co jest w nawiasie postępujemy tak, jak do tej pory:

$$2\left(x^2 + 6x + \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 + 6x + 9 - 9 + \frac{3}{2}\right) = 2\left((x+3)^2 - 9 + \frac{3}{2}\right)$$

Przykład 4

Upraszczając otrzymujemy:

$$f(x) = 2(x+3)^2 - 15$$

Przykład 4

Upraszczając otrzymujemy:

$$f(x) = 2(x+3)^2 - 15$$

Czyli wykres x^2 przesuwamy o 3 jednostki w lewo, następnie rozciągamy $\times 2$ w pionie i przesuwamy o 15 jednostek w dół.

Przykład 5

Rozważamy $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$.

Przykład 5

Rozważamy $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$. Zapisujemy:

$$f(x) = 3\left(x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{2}{3}\right) = 3\left((x+1)^2 - 1 - \frac{2}{3}\right)$$

Przykład 5

Rozważamy $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$. Zapisujemy:

$$f(x) = 3\left(x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{2}{3}\right) = 3\left((x+1)^2 - 1 - \frac{2}{3}\right)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$f(x) = 3(x+1)^2 - 5$$

Przykład 5

Rozważamy $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$. Zapisujemy:

$$f(x) = 3\left(x^2 + 2x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2x + 1 - 1 - \frac{2}{3}\right) = 3\left((x+1)^2 - 1 - \frac{2}{3}\right)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$f(x) = 3(x+1)^2 - 5$$

Czyli wykres x^2 przesuwamy o 1 jednostkę w lewo, następnie rozciągamy $\times 3$ w pionie i przesuwamy o 5 jednostek w dół.

Przykład 6

Rozważamy $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$.

Przykład 6

Rozważamy $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Zapisujemy:

$$g(x) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 2\right) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + 2\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 2\right)$$

Przykład 6

Rozważamy $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Zapisujemy:

$$g(x) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 2\right) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + 2\right) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 2\right)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$g(x) = 2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{7}{8}$$

Przykład 6

Rozważamy $g(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Zapisujemy:

$$g(x) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 2\right) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + 2\right) = 2\left((x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + 2\right)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$g(x) = 2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{7}{8}$$

Czyli wykres x^2 przesuwamy o $\frac{5}{4}$ jednostki w prawo, następnie rozciągamy $\times 2$ w pionie i przesuwamy o $\frac{7}{8}$ jednostki w górę.

Przykład 7

Rozważamy $h(x) = 4 - 6x - x^2$.

Przykład 7

Rozważamy $h(x) = 4 - 6x - x^2$. Zapisujemy:

$$h(x) = -\left(x^2 + 6x - 4\right) = -\left(x^2 + 6x + 9 - 13\right) = -\left((x+3)^2 - 13\right)$$

Przykład 7

Rozważamy $h(x) = 4 - 6x - x^2$. Zapisujemy:

$$h(x) = -\left(x^2 + 6x - 4\right) = -\left(x^2 + 6x + 9 - 13\right) = -\left((x+3)^2 - 13\right)$$

Po usunięciu nawiasu otrzymujemy:

$$h(x) = -(x+3)^2 + 13$$

Przykład 7

Rozważamy $h(x) = 4 - 6x - x^2$. Zapisujemy:

$$h(x) = -\left(x^2 + 6x - 4\right) = -\left(x^2 + 6x + 9 - 13\right) = -\left((x+3)^2 - 13\right)$$

Po usunięciu nawiasu otrzymujemy:

$$h(x) = -(x+3)^2 + 13$$

Czyli wykres x^2 przesuwamy o 3 jednostki w lewo, następnie odbijamy względem osi OX i przesuwamy o 13 jednostek w górę.

Wejściówka

Na wejściówkę trzeba umieć narysować wykres dowolnej funkcji postaci $ax^2 + bx + c$ przekształcając wykres funkcji x^2.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.