Symbol Newtona

Silnia

Musimy umieć obliczać wyrażenia zawierające silnię i symbol Newtona.

Definicja silni

Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Definicja silni

Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

Dodatkowo ustalamy, że: $0! = 1$.

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

Przykłady 1

Oblicz:

i. 1! $1! = 1$

ii. 2!

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

iii. $3!$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

iii. $3!$ $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

iii. $3!$ $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

iv. $4!$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

iii. $3!$ $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

iv. $4!$ $\quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

iii. $3!$ $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

iv. $4!$ $\quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

iv. $7!$

Przykłady 1

Oblicz:

i. $1!$ $\quad 1! = 1$

ii. $2!$ $\quad 2! = 1 \times 2 = 2$

iii. $3!$ $\quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

iv. $4!$ $\quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

iv. $7!$ $\quad 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$ $\qquad \frac{5!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$ $\qquad \frac{5!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$

Uwaga: zawsze skracamy to, co możemy zanim wszystko wymnożymy.

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$ $\qquad \frac{5!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$

Uwaga: zawsze skracamy to, co możemy zanim wszystko wymnożymy.

ii. $\frac{8!}{6!}$

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$ $\frac{5!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$

Uwaga: zawsze skracamy to, co możemy zanim wszystko wymnożymy.

ii. $\frac{8!}{6!}$ $\frac{8!}{6!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 7 \times 8 = 56$

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$ $\qquad \frac{5!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$

Uwaga: zawsze skracamy to, co możemy zanim wszystko wymnożymy.

ii. $\frac{8!}{6!}$ $\qquad \frac{8!}{6!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 7 \times 8 = 56$

iii. $\frac{10!}{8!}$

Przykłady 2

Oblicz:

i. $\frac{5!}{4!}$ $\qquad \frac{5!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$

Uwaga: zawsze skracamy to, co możemy zanim wszystko wymnożymy.

ii. $\frac{8!}{6!}$ $\qquad \frac{8!}{6!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 7 \times 8 = 56$

iii. $\frac{10!}{8!}$ $\qquad \frac{10!}{8!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8} = 9 \times 10 = 90$

Przykłady 3

Oblicz (dla $n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad k < n$)

i. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

Przykłady 3

Oblicz (dla $n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad k < n$)

i. $\frac{(n+1)!}{n!}$ $\qquad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n} = n + 1$

Przykłady 3

Oblicz (dla $n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad k < n$)

i. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ $\qquad \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n} = n+1$

ii. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$

Przykłady 3

Oblicz (dla $n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad k < n$)

i. $\frac{(n+1)!}{n!}$ $\qquad \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n} = n + 1$

ii. $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n} = (n+1)(n+2)$

Przykłady 3

Oblicz (dla $n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad k < n$)

i. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ $\quad \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n} = n+1$

ii. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n} = (n+1)(n+2)$

iii. $\dfrac{n!}{k!}$

Przykłady 3

Oblicz (dla $n, k \in \mathbb{Z}^+ \quad k < n$)

i. $\dfrac{(n+1)!}{n!}$ $\qquad \dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n} = n+1$

ii. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n} = (n+1)(n+2)$

iii. $\dfrac{n!}{k!}$

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \ldots \times k \times (k+1) \times \ldots \times n}{1 \times 2 \times 3 \ldots \times k} = (k+1)(k+2)\ldots(n-1)n$$

Symbol Newtona

Definicja symbolu Newtona

Dla $n, k \in \mathbb{N} \quad n > k$ definiujemy $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$

Przykłady 4

Oblicz:

i. $\binom{6}{4}$

Przykłady 4

Oblicz:

i. $\binom{6}{4}$ $\quad \binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

Przykłady 4

Oblicz:

i. $\binom{6}{4}$ $\qquad \binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

ii. $\binom{8}{3}$

Przykłady 4

Oblicz:

i. $\binom{6}{4}$ $\qquad \binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

ii. $\binom{8}{3}$ $\qquad \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{6 \times 7 \times 8}{2 \times 3} = 56$

Przykłady 4

Oblicz:

i. $\binom{6}{4}$ $\quad \binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

ii. $\binom{8}{3}$ $\quad \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{6 \times 7 \times 8}{2 \times 3} = 56$

iii. $\binom{10}{2}$

Przykłady 4

Oblicz:

i. $\binom{6}{4}$ $\quad \binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

ii. $\binom{8}{3}$ $\quad \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{6 \times 7 \times 8}{2 \times 3} = 56$

iii. $\binom{10}{2}$ $\quad \binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$

Przykłady 5

Oblicz:

i. $\binom{n}{0}$

Przykłady 5

Oblicz:

i. $\binom{n}{0}$ $\qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$

Przykłady 5

Oblicz:

i. $\binom{n}{0}$ $\qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$

ii. $\binom{n}{1}$

Przykłady 5

Oblicz:

i. $\binom{n}{0}$ $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$

ii. $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = n$

Przykłady 5

Oblicz:

i. $\binom{n}{0}$ $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$$

ii. $\binom{n}{1}$ $$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = n$$

iii. $\binom{n}{2}$

Przykłady 5

Oblicz:

i. $\binom{n}{0}$ $\qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$

ii. $\binom{n}{1}$ $\qquad \binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = n$

iii. $\binom{n}{2}$ $\qquad \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{(n-1) \times n}{2}$

Przykłady 6

Oblicz:

i. $\binom{n}{n-1}$

Przykłady 6

Oblicz:

i. $\binom{n}{n-1}$ $\qquad \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = n$

Przykłady 6

Oblicz:

i. $\binom{n}{n-1}$ $\quad$ $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{1! \times (n-1)!} = n$

ii. $\binom{n}{n}$

Przykłady 6

Oblicz:

i. $\binom{n}{n-1}$ $\quad$ $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{1! \times (n-1)!} = n$

ii. $\binom{n}{n}$ $\quad$ $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{0! \times n!} = 1$

Obserwacja

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Obserwacja

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Obserwacja ta wynika wprost z definicji symbolu Newtona i przemienności mnożenia.

Komentarz

Symbol Newtona będziemy wykorzystywać przy rozwinięciu dwumianu $(a+b)^n$. Ma on bardzo ważną interpretację kombinatoryczną. Możemy myśleć o $\binom{n}{k}$ jako o liczbie sposobów wybrania k spośród n elementów.

Komentarz

Symbol Newtona będziemy wykorzystywać przy rozwinięciu dwumianu $(a+b)^n$. Ma on bardzo ważną interpretację kombinatoryczną. Możemy myśleć o $\binom{n}{k}$ jako o liczbie sposobów wybrania k spośród n elementów.

Przykładowo $\binom{4}{2}$ oznacza liczbę sposobów wybrania 2 spośród 4 elementów. $\binom{4}{2} = 6$ i rzeczywiście spośród 4 elemntów możemy wybrać pierwszy i drugi, pierwszy i trzeci, pierwszy i czwarty, drugi i trzeci, drugi i czwarty i w końcu - trzeci i czwarty. W sumie 6 sposobów.

Na wejściówkę trzeba umieć obliczać wyrażenia, w których występuje symbol Newtona (i silnia).

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.