Równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem

Trzeba umieć ustalić liczbę rozwiązań równania kwadratowego z wartością bezwzględną w zależności od parametru.

Strategia rozwiązywania

Dla równań postaci $ax^2 + b|x| + c = 0$, w których w a, b lub c występuje parametr, mamy następującą strategię rozwiązywania.

- Korzystając z faktu $|x|^2 = x^2$ zapisujemy równanie w postaci $a|x|^2 + b|x| + c = 0$,
- Podstawiamy $t = |x|$, by otrzymać $at^2 + bt + c = 0$,
- Ustalamy liczbę rozwiązań powyższego równania oraz ich znaki.
- Każde dodatnie rozwiązanie dla t to dwa rozwiązania dla x, rozwiązanie $t = 0$, to $x = 0$ (jedno rozwiązanie), rozwiązania ujemne ($t < 0$) dają sprzeczność (brak rozwiązań dla x).

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.
Najpierw zapisujemy w postaci $|x|^2 + |x| + 1 - m = 0$ i podstawiamy $t = |x|$. Mamy:

$$t^2 + t + 1 - m = 0$$

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.
Najpierw zapisujemy w postaci $|x|^2 + |x| + 1 - m = 0$ i podstawiamy $t = |x|$. Mamy:

$$t^2 + t + 1 - m = 0$$

$a = 1 \neq 0 \qquad \Delta = 1 - 4(1 - m) = 4m - 3$

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.
Najpierw zapisujemy w postaci $|x|^2 + |x| + 1 - m = 0$ i podstawiamy $t = |x|$. Mamy:

$$t^2 + t + 1 - m = 0$$

$a = 1 \neq 0 \qquad \Delta = 1 - 4(1 - m) = 4m - 3$

Jeśli $m < \frac{3}{4}$ to nie ma rozwiązań dla t, a więc nie ma też rozwiązań dla x.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.
Najpierw zapisujemy w postaci $|x|^2 + |x| + 1 - m = 0$ i podstawiamy $t = |x|$. Mamy:

$$t^2 + t + 1 - m = 0$$

$a = 1 \neq 0 \qquad \Delta = 1 - 4(1 - m) = 4m - 3$

Jeśli $m < \frac{3}{4}$ to nie ma rozwiązań dla t, a więc nie ma też rozwiązań dla x.

Jeśli $m = \frac{3}{4}$, to mamy jedno rozwiązanie dla t, to rozwiązanie to $t = -\frac{1}{2} < 0$, czyli nie daje to żadnych rozwiązań dla x.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Jeśli $m > \frac{3}{4}$, to mamy dwa rozwiązania dla t. Musimy zbadać ich znaki.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Jeśli $m > \frac{3}{4}$, to mamy dwa rozwiązania dla t. Musimy zbadać ich znaki.

$$t_1 \times t_2 = \frac{c}{a} = 1 - m$$

Jeśli $m < 1$ to rozwiązania są tych samych znaków. Ponieważ $t_1 + t_2 = \frac{-b}{a} = -1$, to oba rozwiązania są ujemne. Czyli nie będzie rozwiązań dla x.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Jeśli $m > \frac{3}{4}$, to mamy dwa rozwiązania dla t. Musimy zbadać ich znaki.

$$t_1 \times t_2 = \frac{c}{a} = 1 - m$$

Jeśli $m < 1$ to rozwiązania są tych samych znaków. Ponieważ $t_1 + t_2 = \frac{-b}{a} = -1$, to oba rozwiązania są ujemne. Czyli nie będzie rozwiązań dla x.

Jeśli $m = 1$ to jedno z rozwiązań jest 0, ponieważ $t_1 + t_2 = -1$ to drugie jest ujemne. Daje to w sumie jedno rozwiązanie dla x.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Jeśli $m > \frac{3}{4}$, to mamy dwa rozwiązania dla t. Musimy zbadać ich znaki.

$$t_1 \times t_2 = \frac{c}{a} = 1 - m$$

Jeśli $m < 1$ to rozwiązania są tych samych znaków. Ponieważ $t_1 + t_2 = \frac{-b}{a} = -1$, to oba rozwiązania są ujemne. Czyli nie będzie rozwiązań dla x.

Jeśli $m = 1$ to jedno z rozwiązań jest 0, ponieważ $t_1 + t_2 = -1$ to drugie jest ujemne. Daje to w sumie jedno rozwiązanie dla x.

Jeśli $m > 1$ to mamy rozwiązania różnych znaków, czyli jedno z nich dodatnie. Daje to dwa rozwiązania dla x.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Przykład

Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^2 + |x| + 1 = m$ w zależności od parametru m.

Ostatecznie mamy:

- $m < 1$ brak rozwiązań,
- $m = 1$ jedno rozwiązanie,
- $m > 1$ dwa rozwiązania.

Wejściówka

Na wejściówce będzie analogiczny przykład.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.