

# Równania kwadratowe z wartością bezwzględną

Trzeba umieć rozwiązać równanie kwadratowe, w którym występuje wartość bezwzględna.

# Wprowadzenie

By rozwiązać równanie postaci  $|f(x)| = a$  dla  $a \geq 0$  rozwiązujemy alternatywę:

$$f(x) = -a \quad \vee \quad f(x) = a$$

# Wprowadzenie

By rozwiązać równanie postaci  $|f(x)| = a$  dla  $a \geq 0$  rozwiązujemy alternatywę:

$$f(x) = -a \quad \vee \quad f(x) = a$$

Nie ma tu znaczenia, czy  $f(x)$  to funkcja liniowa czy kwadratowa czy jakakolwiek inna.

# Przykład 1

Rozwiąż  $|x^2 - 5x + 5| = 1$

# Przykład 1

Rozwiąż  $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 5 = 1$$

# Przykład 1

$$\text{Rozwiąż } |x^2 - 5x + 5| = 1$$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Czyli:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

# Przykład 1

Rozwiąż  $|x^2 - 5x + 5| = 1$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Czyli:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ . Drugie równanie również ma dwa rozwiązania  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 4$ .



# Przykład 1

$$\text{Rozwiąż } |x^2 - 5x + 5| = 1$$

Rozwiązujemy

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 5 = 1$$

Czyli:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ . Drugie równanie również ma dwa rozwiązania  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 4$ .

Ostatecznie otrzymujemy cztery rozwiązania  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

## Przykład 2

Rozwiąż  $|3x^2 + 6x - 11| = -3$

## Przykład 2

$$\text{Rozwiąż } |3x^2 + 6x - 11| = -3$$

Po prawej stronie występuje liczba ujemna, a po lewej nieujemna. W związku z tym równanie jest sprzeczne.  $x \in \emptyset$ .

## Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$ .

## Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$ .

Pierwsza obserwacja - jeśli  $2x + 1 < 0$ , czyli  $x < -\frac{1}{2}$ , to równanie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

## Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$ .

Pierwsza obserwacja - jeśli  $2x + 1 < 0$ , czyli  $x < -\frac{1}{2}$ , to równanie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Dalej zakładamy, że  $x \geq -\frac{1}{2}$ .

## Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$ .

Pierwsza obserwacja - jeśli  $2x + 1 < 0$ , czyli  $x < -\frac{1}{2}$ , to równanie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Dalej zakładamy, że  $x \geq -\frac{1}{2}$ . Teraz rozwiązujemy:

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

## Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$ .

Pierwsza obserwacja - jeśli  $2x + 1 < 0$ , czyli  $x < -\frac{1}{2}$ , to równanie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Dalej zakładamy, że  $x \geq -\frac{1}{2}$ . Teraz rozwiązujemy:

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Czyli:

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania  $x_1 = -2 - \sqrt{6}$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{6}$ .

Drugie równanie również ma dwa rozwiązania  $x_3 = -2$ ,  $x_4 = 2$ .



## Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x^2 + 2x - 3| = 2x + 1$ .

Pierwsza obserwacja - jeśli  $2x + 1 < 0$ , czyli  $x < -\frac{1}{2}$ , to równanie nie ma rozwiązań, gdyż prawa strona jest ujemna, a lewa jest nieujemna.

Dalej zakładamy, że  $x \geq -\frac{1}{2}$ . Teraz rozwiązujemy:

$$x^2 + 2x - 3 = -2x - 1 \quad \vee \quad x^2 + 2x - 3 = 2x + 1$$

Czyli:

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 4 = 0$$

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania  $x_1 = -2 - \sqrt{6}$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{6}$ .

Drugie równanie również ma dwa rozwiązania  $x_3 = -2$ ,  $x_4 = 2$ .

Tylko dwa z powyższych rozwiązań spełniają założenie  $x \geq -\frac{1}{2}$ .

Ostatecznie otrzymujemy cztery rozwiązania  $x \in \{-2 + \sqrt{6}, 2\}$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia  $x^2 - 4x - 5$ . Miejsca zerowe tej funkcji to  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 5$ . Czyli wyrażenie  $x^2 - 4x - 5$  jest dodatnie dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ , a ujemne dla  $x \in (-1, 5)$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia  $x^2 - 4x - 5$ . Miejsca zerowe tej funkcji to  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 5$ . Czyli wyrażenie  $x^2 - 4x - 5$  jest dodatnie dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ , a ujemne dla  $x \in (-1, 5)$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia  $x^2 - 4x - 5$ . Miejsca zerowe tej funkcji to  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 5$ . Czyli wyrażenie  $x^2 - 4x - 5$  jest dodatnie dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ , a ujemne dla  $x \in (-1, 5)$

Wyrażenie  $x - 2$  jest oczywiście dodatnie dla  $x > 2$ , a ujemne dla  $x < 2$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Chcielibyśmy opuścić wartość bezwzględną, ale by to zrobić musimy ustalić znaki wyrażeń wewnątrz.

Najpierw ustalimy znak wyrażenia  $x^2 - 4x - 5$ . Miejsca zerowe tej funkcji to  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 5$ . Czyli wyrażenie  $x^2 - 4x - 5$  jest dodatnie dla  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ , a ujemne dla  $x \in (-1, 5)$

Wyrażenie  $x - 2$  jest oczywiście dodatnie dla  $x > 2$ , a ujemne dla  $x < 2$ .

Musimy więc przeanalizować następujące przedziały:

$$x < -1 \quad -1 \leq x < 2 \quad 2 \leq x < 5 \quad 5 \leq x$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .



## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $x < -1$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $x < -1$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $x < -1$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_1 = \frac{5-\sqrt{73}}{2}$  oraz  $x_2 = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $x < -1$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie, a drugie ujemne.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_1 = \frac{5-\sqrt{73}}{2}$  oraz  $x_2 = \frac{5+\sqrt{73}}{2}$ . Tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia założenie  $x < -1$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $-1 \leq x < 2$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $-1 \leq x < 2$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $-1 \leq x < 2$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_3 = 1$  oraz  $x_4 = 2$ .



## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $-1 \leq x < 2$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne i drugie jest ujemne.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 - x + 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_3 = 1$  oraz  $x_4 = 2$ . Znów tylko pierwsze z tych rozwiązań spełnia założenie  $-1 \leq x < 2$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $2 \leq x < 5$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $2 \leq x < 5$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $2 \leq x < 5$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_5 = 2$  oraz  $x_6 = 3$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $2 \leq x < 5$ , to pierwsze wyrażenie jest ujemne, a drugie jest dodatnie. Otrzymujemy:

$$-x^2 + 4x + 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_5 = 2$  oraz  $x_6 = 3$ . Oba rozwiązania spełniają założenie  $2 \leq x < 5$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $5 \leq x$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$



## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $5 \leq x$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $5 \leq x$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_7 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$  oraz  $x_8 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Jeśli  $5 \leq x$ , to pierwsze wyrażenie jest dodatnie i drugie jest dodatnie.  
Otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 + x - 2 = 9$$

Czyli:

$$x^2 - 3x - 16 = 0$$

Mamy dwa rozwiązania  $x_7 = \frac{3-\sqrt{73}}{2}$  oraz  $x_8 = \frac{3+\sqrt{73}}{2}$ . Tylko drugie z tych rozwiązań spełnia założenie  $5 \leq x$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

## Przykład 4

Rozwiąż równanie  $|x^2 - 4x - 5| + |x - 2| = 9$ .

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x \in \left\{ \frac{5 - \sqrt{73}}{2}, 1, 2, 3, \frac{3 + \sqrt{73}}{2} \right\}$$

# Wejściówka

Na wejściówkę trzeba umieć rozwiązać przykłady analogiczne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na [T.J.Lechowski@gmail.com](mailto:T.J.Lechowski@gmail.com).