Różne funkcje

Przyjrzymy się przykładom mniej typowych funkcji: $sgn(x)$, $\lfloor x \rfloor$ (oznaczana jako $[x]$), oraz funkcjom $\max(x, y)$ i $\min(x, y)$.

Zapis

W informatyce często korzysta się z dwóch funkcji $\lfloor x \rfloor$ oraz $\lceil x \rceil$. Pierwsza to tzw. floor function, druga ceiling function. W podręczniku funkcja $[x]$ oznacza $\lfloor x \rfloor$, funkcja $\lceil x \rceil$ nie jest w ogóle rozważana.

Definicja

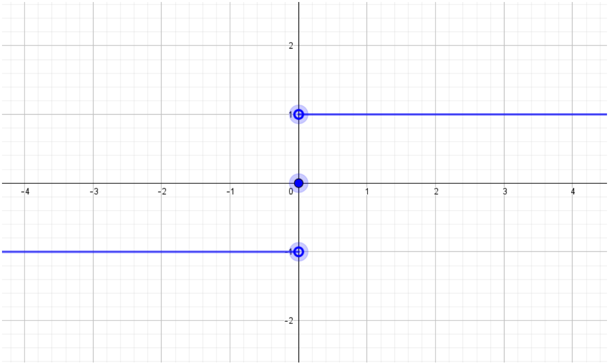
Funckja $sgn(x)$ jest nam już doskonale znana. To funkcja, która określa znak argumentu. Jeśli znak jest dodatni zwraca 1, jeśli ujemny -1, a jeśli 0, to zwraca 0.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 \quad dla \quad x > 0 \\ 0 \quad dla \quad x = 0 \\ -1 \quad dla \quad x < 0 \end{cases}$$

W praktyce jest to bardziej wyrafinowany sposób rysowania *sign diagrams*.

Przykład 1

Wykres funkcji $sgn(x)$:



Przykład 2

Narysuj wykres $sgn(x+2)$.

Przykład 2

Narysuj wykres $sgn(x+2)$.

Musimy po prostu ustalić znak wyrażenia $x+2$. Dla $x < -2$ wyrażenie jest ujemne, a więc funkcja przypisze wartość -1, dla $x = -2$ wyrażenie ma wartość zero, a więc funkcja przypisze 0, dla $x > -2$ wyrażenie jest dodatnie, a więc funkcja przypisze 1.

Przykład 2

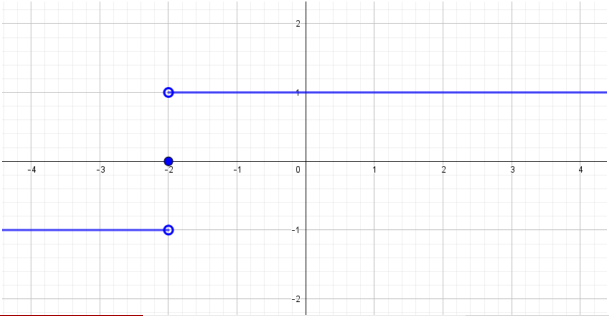
Narysuj wykres $sgn(x+2)$.

Musimy po prostu ustalić znak wyrażenia $x+2$. Dla $x<-2$ wyrażenie jest ujemne, a więc funkcja przypisze wartość -1, dla $x=-2$ wyrażenie ma wartość zero, a więc funkcja przypisze 0, dla $x>-2$ wyrażenie jest dodatnie, a więc funkcja przypisze 1.
Wykres:

Przykład 2

Narysuj wykres $sgn(x+2)$.

Musimy po prostu ustalić znak wyrażenia $x+2$. Dla $x < -2$ wyrażenie jest ujemne, a więc funkcja przypisze wartość -1, dla $x = -2$ wyrażenie ma wartość zero, a więc funkcja przypisze 0, dla $x > -2$ wyrażenie jest dodatnie, a więc funkcja przypisze 1.
Wykres:



Przykład 3

Narysuj wykres $sgn(|x| - 1)$.

Przykład 3

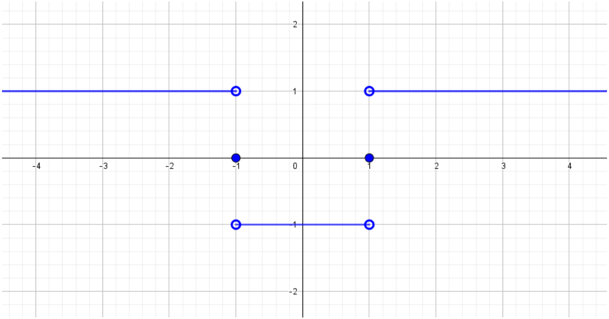
Narysuj wykres $sgn(|x|-1)$.

Wyrażenie $|x|-1$ jest ujemne dla $x \in (-1,1)$, zero dla $x = \pm 1$, dodatnie dla $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.
Wykres:

Przykład 3

Narysuj wykres $sgn(|x| - 1)$.

Wyrażenie $|x| - 1$ jest ujemne dla $x \in (-1, 1)$, zero dla $x = \pm 1$, dodatnie dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Wykres:



Przykład 4

Narysuj wykres $sgn\Big((x+2)(x-1)(x-2)\Big)$.

Przykład 4

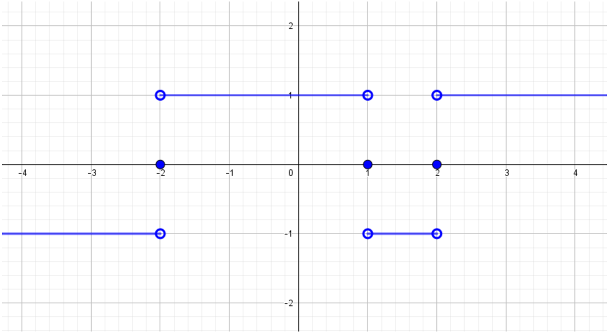
Narysuj wykres $sgn\Big((x+2)(x-1)(x-2)\Big)$.

Wyrażenie $(x+2)(x-1)(x-2)$ jest ujemne dla $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$, zero dla $x \in \{-2, 1, 2\}$, dodatnie dla $x \in (-2, 1) \cup (2, \infty)$.
Wykres:

Przykład 4

Narysuj wykres $sgn\Big((x+2)(x-1)(x-2)\Big)$.

Wyrażenie $(x+2)(x-1)(x-2)$ jest ujemne dla $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$, zero dla $x \in \{-2, 1, 2\}$, dodatnie dla $x \in (-2, 1) \cup (2, \infty)$.
Wykres:



Definicja

Funkcja $\lfloor x \rfloor$ każdemu argumentowi przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od tego argumentu.

Definicja

Funkcja $\lfloor x \rfloor$ każdemu argumentowi przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od tego argumentu.

Przykłady: $\lfloor 4.2 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

Definicja

Funkcja $\lfloor x \rfloor$ każdemu argumentowi przyporządkowuje największą liczbę całkowitą nie większą od tego argumentu.

Przykłady: $\lfloor 4.2 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

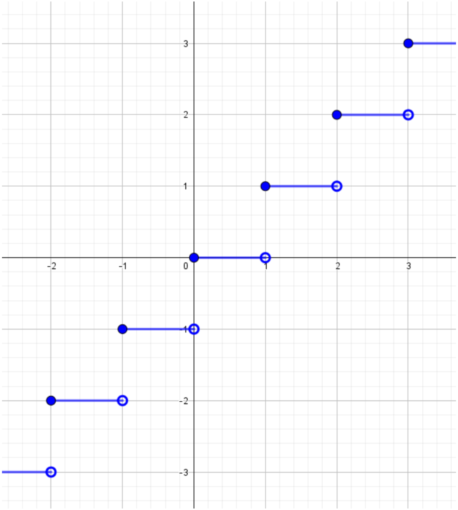
Uwaga: $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$ gdyż największą liczbą całkowitą nie większą od -2.5 jest właśnie -3 (a nie -2).

Definicja

We wstępie wspomniałem też o funkcji $\lceil x \rceil$. Ta funkcja każdemu argumentowi przyporządkowuje najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od tego argumentu. Nie będziemy jednak tej funkcji analizowali.

Przykład 5

Wykres $\lfloor x \rfloor$:



Przykład 6

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$.

Przykład 6

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$.

Czyli najpierw odejmujemy od x jeden, a później bierzemy największą liczbę całkowitą nie większą od wyniku tego odejmmowania.

Przykład 6

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$.

Czyli najpierw odejmujemy od x jeden, a później bierzemy największą liczbę całkowitą nie większą od wyniku tego odejmmowania.

Przykładowo $f(0) = \lfloor -1 \rfloor = -1$, $f(\pi) = \lfloor \pi - 1 \rfloor = 2$, $f(-0.5) = \lfloor -1.5 \rfloor = -2$.

Przykład 6

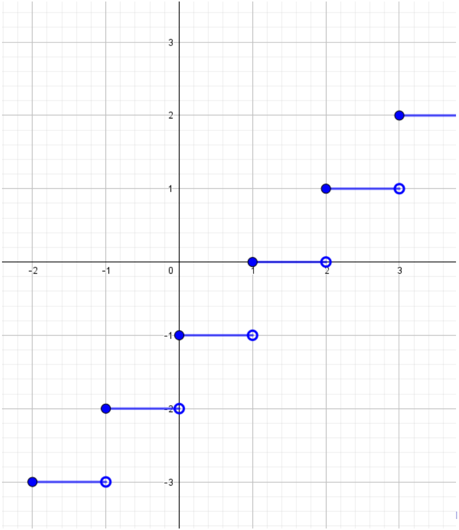
Narysuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$.

Przykład 6

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$. Wykres:

Przykład 6

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x - 1 \rfloor$. Wykres:



Definicja

Maksimum dwóch argumentów definiujemy następująco:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & jeli \quad a \geqslant b \\ b & jeli \quad b > a \end{cases}$$

Definicja

Maksimum dwóch argumentów definiujemy następująco:

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & jeli \quad a \geqslant b \\ b & jeli \quad b > a \end{cases}$$

Analogicznie minimum definiujemy:

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & jeli \quad a \leqslant b \\ b & jeli \quad b < a \end{cases}$$

Maksimum i minimum

Są dwie dobre strategie rysowania funkcji zawierających operację max lub min. Rozpatrzmy przykład $f(x) = \max\Big(g(x), h(x)\Big)$

- Strategia 1: Rysujemy obie funkcje: $g(x)$ i $h(x)$, a później zaznaczamy tylko tę części wykresu które są wyżej (tzn. zaznaczamy wykres g jeśli jest wyżej od h i *vice versa*).

Maksimum i minimum

Są dwie dobre strategie rysowania funkcji zawierających operację max lub min. Rozpatrzmy przykład $f(x) = \max\Big(g(x), h(x)\Big)$

- Strategia 1: Rysujemy obie funkcje: $g(x)$ i $h(x)$, a później zaznaczamy tylko tę części wykresu które są wyżej (tzn. zaznaczamy wykres g jeśli jest wyżej od h i *vice versa*).
- Strategia 2: Najpierw obliczamy gdzie $g(x) \geqslant h(x)$ i w tych przedziałach rysujemy $g(x)$, a w pozostałych rysujemy $h(x)$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Omówimy na tym przykładzie drugą strategię.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Omówimy na tym przykładzie drugą strategię. Musimy się zastanowić, dla jakich x $x^2 \geqslant 1$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Omówimy na tym przykładzie drugą strategię. Musimy się zastanowić, dla jakich x $x^2 \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} x^2 &\geqslant\!> 1 \\ x^2 - 1 &\geqslant 0 \\ (x-1)(x+1) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Omówimy na tym przykładzie drugą strategię. Musimy się zastanowić, dla jakich x $x^2 \geqslant 1$.

$$x^2 \geqslant > 1$$
$$x^2 - 1 \geqslant 0$$
$$(x-1)(x+1) \geqslant 0$$

Rozwiązaniami są $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. Czyli dla tych x rysujemy wykres funkcji x^2, a dla pozostałych (czyli dla $x \in (-1, 1)$) rysujemu stałą funkcję $f(x) = 1$.

Przykład 7

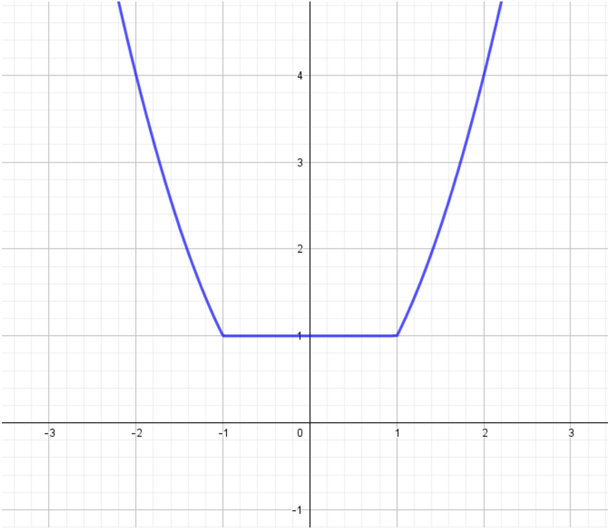
Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$. Wykres:

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$. Wykres:



Przykład 7

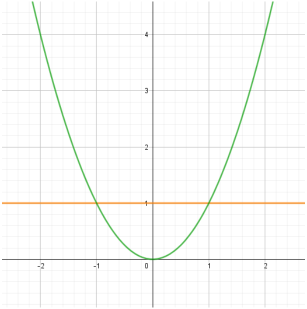
Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$.

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$. Pierwsza strategia: rysujemy obie funkcje:

Przykład 7

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(x^2, 1)$. Pierwsza strategia: rysujemy obie funkcje:



Zaznaczamy tę, która jest wyżej. Otrzymujemy oczywiście wykres taki sam, jak na poprzednim slajdzie.

Przykład 8

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$.

Przykład 8

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$.

Musimy się rozwiązać nierówność $|x-1| \geqslant 2x$.

Przykład 8

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$.

Musimy się rozwiązać nierówność $|x-1| \geqslant 2x$. Rozwiązujemy ją analizując dwa przypadki (1) $x < 1$ oraz (2) $x \geqslant 1$.

Przykład 8

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$.

Musimy się rozwiązać nierówność $|x-1| \geqslant 2x$. Rozwiązujemy ją analizując dwa przypadki (1) $x < 1$ oraz (2) $x \geqslant 1$.

Rozwiązanie powinno wyjść $x \in (-\infty, \frac{1}{3}\rangle$. Czyli dla tych x rysujemy funkcę $|x-1|$, dla pozostałych $2x$.

Przykład 8

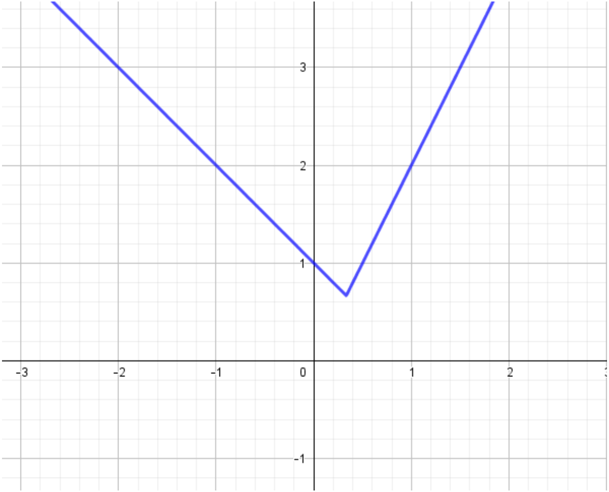
Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$.

Przykład 8

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$. Wykres:

Przykład 8

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \max(|x-1|, 2x)$. Wykres:



W przypadku funkcji minimum strategia jest oczywiście analogiczna. Albo rysujemy obie funkcje i zaznaczamy tę, która jest niżej, albo rozwiązujemy nierówność i rysujemy obie funkcje w odpowiednich przedziałach.

Na wejściówce trzeba będzie narysować funckję określoną kilkoma wzorami (być może zawierającą którąś z powyższych funkcji).

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.