Materiały na kółko

Na egzaminie będą zadania z następujących działów:

1. Basic proofs - podstawowe dowody, ten dział ma sprawdzać umiejętność poprawnego zapisu dowodu matematycznego;
2. Mathematical induction - dowody wykorzystujące zasadę indukcji matematycznej;
3. Pigeonhole principle - dowody wykorzystujące zasadę szufladkową Dirichleta;
4. Number systems - zapis liczb w różnych systemach liczbowych oraz arytmetyka w tych systemach.
5. Modular arithmetic and linear congruences - działania na resztach, równania i układy równań w arytmetyce modularnej.

W tej części omówione zostaną podstawy zapisu prostych dowodów matematycznych na dwóch przykładach.

Przykład 1

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych p i q takich, że $p > q$, jeśli $p - q$ jest liczbą parzystą to $p + q$ jest liczbą parzystą.

Przykład 1 - rozwiązania

Mamy dwie dowolne dodatnie liczby całkowite p i q, takie, że $p > q$.
Chcemy pokazać, że jeśli $p - q$ jest liczbą parzystą, to $p + q$ jest liczbą parzystą.

Przykład 1 - rozwiązania

Mamy dwie dowolne dodatnie liczby całkowite p i q, takie, że $p > q$. Chcemy pokazać, że jeśli $p - q$ jest liczbą parzystą, to $p + q$ jest liczbą parzystą.

Na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie (to, od czego wychodzimy). Na czerwono wniosek (to, do czego chcemy dojść).

Przykład 1 - rozwiązania

Mamy dwie dowolne dodatnie liczby całkowite p i q, takie, że $p > q$. Chcemy pokazać, że jeśli $p - q$ jest liczbą parzystą, to $p + q$ jest liczbą parzystą.

Na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie (to, od czego wychodzimy). Na czerwono wniosek (to, do czego chcemy dojść).

$p - q$ jest liczbą parzystą, czyli $p - q = 2m$, dla $m \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1 - rozwiązania

Mamy dwie dowolne dodatnie liczby całkowite p i q, takie, że $p > q$. Chcemy pokazać, że jeśli $p - q$ jest liczbą parzystą, to $p + q$ jest liczbą parzystą.

Na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie (to, od czego wychodzimy). Na czerwono wniosek (to, do czego chcemy dojść).

$p - q$ jest liczbą parzystą, czyli $p - q = 2m$, dla $m \in \mathbb{Z}$.

$$p - q = 2m \qquad \backslash + 2q$$
$$p + q = 2m + 2q$$
$$p + q = 2(m + q) = 2n$$

Przykład 1 - rozwiązania

Mamy dwie dowolne dodatnie liczby całkowite p i q, takie, że $p > q$. Chcemy pokazać, że jeśli $p - q$ jest liczbą parzystą, to $p + q$ jest liczbą parzystą.

Na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie (to, od czego wychodzimy). Na czerwono wniosek (to, do czego chcemy dojść).

$p - q$ jest liczbą parzystą, czyli $p - q = 2m$, dla $m \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
p - q &= 2m \qquad \backslash + 2q \\
p + q &= 2m + 2q \\
p + q &= 2(m + q) = 2n
\end{aligned}
$$

czyli $p + q = 2n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, a więc $p + q$ jest liczbą parzystą, co należało udowodnić.

Przykład 2

Udowodnij, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 też jest liczbą nieparzystą.

Przykład 1 - rozwiązania

Chcemy pokazać, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 jest liczbą nieparzystą.

Przykład 1 - rozwiązania

Chcemy pokazać, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 jest liczbą nieparzystą.

Znów na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie, a na czerwono wniosek.

Przykład 1 - rozwiązania

Chcemy pokazać, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 jest liczbą nieparzystą.

Znów na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie, a na czerwono wniosek.

n jest liczbą nieparzystą, czyli $n = 2k + 1$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1 - rozwiązania

Chcemy pokazać, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 jest liczbą nieparzystą.

Znów na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie, a na czerwono wniosek.

n jest liczbą nieparzystą, czyli $n = 2k + 1$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$$

Przykład 1 - rozwiązania

Chcemy pokazać, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to n^2 jest liczbą nieparzystą.

Znów na niebiesko zaznaczone jest nasze założenie, a na czerwono wniosek.

n jest liczbą nieparzystą, czyli $n = 2k + 1$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$$

czyli $n^2 = 2m + 1$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$, a więc n^2 jest liczbą nieparzystą, co należało udowodnić.

Zasada indukcji matematycznej

If $P(0)$ and for all $k \in \mathbb{N}$ if $P(k)$, then $P(k+1)$, then for all $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$.

Zasada indukcji matematycznej

If $P(0)$ and for all $k \in \mathbb{N}$ if $P(k)$, then $P(k+1)$, then for all $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$.

Przeformułujmy tę zasadę na prostszy język. Zgodnie z zasadą jeśli uda nam się wykazać, że:

- dana własność przysługuje elementowi początkowemu ($P(0)$) oraz, że

Zasada indukcji matematycznej

If $P(0)$ and for all $k \in \mathbb{N}$ if $P(k)$, then $P(k+1)$, then for all $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$.

Przeformułujmy tę zasadę na prostszy język. Zgodnie z zasadą jeśli uda nam się wykazać, że:

- dana własność przysługuje elementowi początkowemu ($P(0)$) oraz, że
- jeśli dana własność przysługuje jakiemuś dowolnemu elementowi, to przysługuje również następnemu (for all $k \in \mathbb{N}$ if $P(k)$, then $P(k+1)$).

Zasada indukcji matematycznej

If $P(0)$ and for all $k \in \mathbb{N}$ if $P(k)$, then $P(k+1)$, then for all $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$.

Przeformułujmy tę zasadę na prostszy język. Zgodnie z zasadą jeśli uda nam się wykazać, że:

- dana własność przysługuje elementowi początkowemu ($P(0)$) oraz, że
- jeśli dana własność przysługuje jakiemuś dowolnemu elementowi, to przysługuje również następnemu (for all $k \in \mathbb{N}$ if $P(k)$, then $P(k+1)$).

to możemy wywnioskować, że dana własność przysługuje każdemu elementowi (for all $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$).

Struktura dowodu indukcyjnego

Dowody indukcyjne mają ściśle określoną strukturę. W kroku pierwszym wykazujemy, że dana własność przysługuje elementowi początkowemu. Często jest to prosty krok, ale nie można go pomijać.

Struktura dowodu indukcyjnego

Dowody indukcyjne mają ściśle określoną strukturę. W kroku pierwszym wykazujemy, że dana własność przysługuje elementowi początkowemu. Często jest to prosty krok, ale nie można go pomijać. Uwaga: elementem początkowym nie zawsze jest 0 czy 1.

Struktura dowodu indukcyjnego

Dowody indukcyjne mają ściśle określoną strukturę. W kroku pierwszym wykazujemy, że dana własność przysługuje elementowi początkowemu. Często jest to prosty krok, ale nie można go pomijać. Uwaga: elementem początkowym nie zawsze jest 0 czy 1.

Drugi krok ma postać "if ..., then ...", a więc ma postać implikacji. Zawsze, gdy dowodzimy implikacji zakładamy przesłankę i na jej podstawie udowadniamy wniosek. W przypadku indukcji zakładamy, że jakiś element k ma własność P i na tej podstawie udowadniamy, że także element $k+1$ będzie miał własność P.

Struktura dowodu indukcyjnego

Dowody indukcyjne mają ściśle określoną strukturę. W kroku pierwszym wykazujemy, że dana własność przysługuje elementowi początkowemu. Często jest to prosty krok, ale nie można go pomijać. Uwaga: elementem początkowym nie zawsze jest 0 czy 1.

Drugi krok ma postać "if ..., then ...", a więc ma postać implikacji. Zawsze, gdy dowodzimy implikacji zakładamy przesłankę i na jej podstawie udowadniamy wniosek. W przypadku indukcji zakładamy, że jakiś element k ma własność P i na tej podstawie udowadniamy, że także element $k+1$ będzie miał własność P.

Trzeci krok to już formalność. Polega na przytoczeniu zasady indukcji matematycznej, zgodnie z którą poprzednie dwa kroki prowadzą do ogólnego wniosku.

Przykłady

Musimy umieć zastosować dowody indukcyjne do trzech rodzajów przykładów:

- podzielność,
- nierówności,
- sumy ciągów.

Przykład 1 - podzielność

Udowodnij, że $3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ jest podzielne przez 14 dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 1 - podzielność

Krok 1: $n = 0$

Przykład 1 - podzielność

Krok 1: $n = 0$

$3^{4\times0+2} + 5^{2\times0+1} = 3^2 + 5^1 = 14$, co jest oczywiście podzielne przez 14.

Przykład 1 - podzielność

Krok 1: $n = 0$

$3^{4\times 0+2} + 5^{2\times 0+1} = 3^2 + 5^1 = 14$, co jest oczywiście podzielne przez 14.

Krok 2: zakładamy tezę dla $n = k$ i chcemy pokazać, że jest prawdziwa również dla $n = k + 1$.

Przykład 1 - podzielność

Krok 1: $n = 0$

$3^{4\times 0+2} + 5^{2\times 0+1} = 3^2 + 5^1 = 14$, co jest oczywiście podzielne przez 14.

Krok 2: zakładamy tezę dla $n = k$ i chcemy pokazać, że jest prawdziwa również dla $n = k + 1$.

Założenie: $14 \mid 3^{4k+2} + 5^{2k+1}$
Cel: $14 \mid 3^{4k+6} + 5^{2k+3}$

Przykład 1 - podzielność

$$
\begin{aligned}
& 3^{4k+6} + 5^{2k+3} = \\
= {} & 3^4 \times 3^{4k+2} + 5^2 \times 5^{2k+1} = \\
= {} & 81 \times 3^{4k+2} + 25 \times 5^{2k+1} = \\
= {} & 56 \times 3^{4k+2} + 25 \times 3^{4k+2} + 25 \times 5^{2k+1} = \\
= {} & 14 \times 4 \times 3^{4k+2} + 25(3^{4k+2} + \times 5^{2k+1})
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy sumę dwóch elementów. Każdy z nich jest podzielny przez 14 (drugi na mocy założenia indukcyjnego), a więc suma jest również podzielna przez 14. Czyli $14 \mid 3^{4k+6} + 5^{2k+3}$. To kończy drugi krok.

Przykład 1 - podzielność

Krok 3: Wykazaliśmy, że teza jest prawdziwa dla $n = 0$ oraz, że jeśli jest prawdziwa dla $n = k$, to jest prawdziwa dla $n = k + 1$, a więc na mocy zasady indukcji matematycznej teza jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 2 - nierówność

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 4$, prawdziwa jest nierówność:

$$3^n > (n+1)^3$$

Przykład 2 - nierówność

Krok 1: $n = 5$

Przykład 2 - nierówność

Krok 1: $n = 5$

$LHS = 3^5 = 243$
$RHS = (5+1)^3 = 6^3 = 216$
Oczywiście $LHS > RHS$, a więc teza jest prawdziwa dla $n = 5$

Przykład 2 - nierówność

Krok 1: $n = 5$

$LHS = 3^5 = 243$
$RHS = (5+1)^3 = 6^3 = 216$
Oczywiście $LHS > RHS$, a więc teza jest prawdziwa dla $n = 5$

Krok 2: zakładamy tezę dla $n = k$ i chcemy pokazać, że jest prawdziwa również dla $n = k + 1$.

Przykład 2 - nierówność

Krok 1: $n = 5$

$LHS = 3^5 = 243$
$RHS = (5+1)^3 = 6^3 = 216$
Oczywiście $LHS > RHS$, a więc teza jest prawdziwa dla $n = 5$

Krok 2: zakładamy tezę dla $n = k$ i chcemy pokazać, że jest prawdziwa również dla $n = k + 1$.

Założenie: $3^k > (k+1)^3$
Cel: $3^{k+1} > (k+2)^3$

Przykład 2 - nierówność

$$
\begin{aligned}
LHS = 3^{k+1} &= 3 \times 3^k > \\
&> 3 \times (k+1)^3 = \\
&= 3 \times (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \\
&= 3k^3 + 9k^2 + 9k + 3
\end{aligned}
$$

Skoro $k > 4$, to na pewno $2k^3 > 5$, a $3k^2 > 3k$, mamy więc:

$$
\begin{aligned}
&3k^3 + 9k^2 + 9k + 3 > \\
&> k^3 + 6k^2 + 12k + 8 = \\
&= (k+2)^3 = RHS
\end{aligned}
$$

Otrzymaliśmy pożądany wynik: $3^{k+1} > (k+2)^3$

Przykład 2 - nierówność

Krok 3: Wykazaliśmy, że teza jest prawdziwa dla $n = 5$ oraz, że jeśli jest prawdziwa dla $n = k$, to jest prawdziwa dla $n = k + 1$, a więc na mocy zasady indukcji matematycznej teza jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N},\ n > 4$.

Przykład 3 - suma ciągu

Wykaż, że:

$$1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + \ldots + n \times (n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

Przykład 3 - suma ciągu

Krok 1: $n = 1$

Przykład 3 - suma ciągu

Krok 1: $n = 1$

$LHS = 1 \times 4 = 4$
$RHS = \frac{1 \times 2 \times 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$
Mamy więc $LHS = RHS$, a więc teza jest prawdziwa dla $n = 1$

Przykład 3 - suma ciągu

Krok 1: $n = 1$

$LHS = 1 \times 4 = 4$
$RHS = \frac{1 \times 2 \times 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$
Mamy więc $LHS = RHS$, a więc teza jest prawdziwa dla $n = 1$

Krok 2: zakładamy tezę dla $n = k$ i chcemy pokazać, że jest prawdziwa również dla $n = k + 1$.

Przykład 3 - suma ciągu

Krok 1: $n = 1$

$LHS = 1 \times 4 = 4$
$RHS = \frac{1\times2\times6}{3} = \frac{12}{3} = 4$
Mamy więc $LHS = RHS$, a więc teza jest prawdziwa dla $n = 1$

Krok 2: zakładamy tezę dla $n = k$ i chcemy pokazać, że jest prawdziwa również dla $n = k + 1$.

Założenie: $1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + ... + k \times (k + 3) = \frac{k(k+1)(k+5)}{3}$
Cel:
$1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + ... + k \times (k + 3) + (k + 1) \times (k + 4) = \frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{3}$

Przykład 3 - suma ciągu

$$RHS = \frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{3} = \frac{(k^2+3k+2)(k+6)}{3} =$$
$$= \frac{k^3+9k^2+20k+12}{3}$$

Przykład 3 - suma ciągu

$$RHS = \frac{(k+1)(k+2)(k+6)}{3} = \frac{(k^2+3k+2)(k+6)}{3} = $$
$$= \frac{k^3+9k^2+20k+12}{3}$$

$$LHS = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 + ... + k \times (k+3) + (k+1) \times (k+4) =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+5)}{3} + (k+1) \times (k+4) =$$
$$= \frac{k(k+1)(k+5) + 3(k+1)(k+4)}{3} =$$
$$= \frac{k^3+6k^2+5k+3k^2+15k+12}{3} =$$
$$= \frac{k^3+9k^2+20k+12}{3} = RHS$$

Przykład 3 - suma ciągu

Krok 3: Wykazaliśmy, że teza jest prawdziwa dla $n = 1$ oraz, że jeśli jest prawdziwa dla $n = k$, to jest prawdziwa dla $n = k + 1$, a więc na mocy zasady indukcji matematycznej teza jest prawdziwa dla każdej dodatniej liczby naturalnej.

Zasada szufladkowa

Jeśli w n szufladkach jest m przedmiotów, przy czym $m > n$, to w co najmniej jednej szufladce jest więcej niż jeden przedmiot.

Zasada szufladkowa

Jeśli w n szufladkach jest m przedmiotów, przy czym $m > n$, to w co najmniej jednej szufladce jest więcej niż jeden przedmiot.

Przykład: w grupie 20 uczniów na pewno co najmniej dwóch urodziło w tym samym miesiącu. Jest 12 miesięcy (szufladki), a uczniów 20.

Zasada szufladkowa

Jeśli w n szufladkach jest m przedmiotów, przy czym $m > n$, to w co najmniej jednej szufladce jest więcej niż jeden przedmiot.

Przykład: w grupie 20 uczniów na pewno co najmniej dwóch urodziło w tym samym miesiącu. Jest 12 miesięcy (szufladki), a uczniów 20.

Uogólniona Zasada szufladkowa

Jeśli w n szufladkach jest m przedmiotów, przy czym $m > kn + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}^+$, to w co najmniej jednej szufladce jest co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

Zasada szufladkowa

Jeśli w n szufladkach jest m przedmiotów, przy czym $m > n$, to w co najmniej jednej szufladce jest więcej niż jeden przedmiot.

Przykład: w grupie 20 uczniów na pewno co najmniej dwóch urodziło w tym samym miesiącu. Jest 12 miesięcy (szufladki), a uczniów 20.

Uogólniona Zasada szufladkowa

Jeśli w n szufladkach jest m przedmiotów, przy czym $m > kn + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}^+$, to w co najmniej jednej szufladce jest co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

Przykład: w grupie 100 studentów na pewno co najmniej 9 urodziło się w tym samym miesiącu. Jest 12 miesięcy (szufladki), a studentów 100. Przy czym $100 > 8 \times 12 + 1$.

Przykład 1

Udowodnij, że wśród 11 dowolnych liczb naturalnych są dwie takie liczby, których różnica jest podzielna przez 10.

Przykład 1

Udowodnij, że wśród 11 dowolnych liczb naturalnych są dwie takie liczby, których różnica jest podzielna przez 10.

Dowód:

Przykład 1

Udowodnij, że wśród 11 dowolnych liczb naturalnych są dwie takie liczby, których różnica jest podzielna przez 10.

Dowód:
Reszt z dzielenia przez 10 jest 10. Skoro mamy 11 liczba, to zgodnie z zasadą szufladkową co najmniej dwie z nich będą miały tę samą resztę z dzielenia przez 10 (możlwe reszty to szufladki, liczby to przedmioty, które do nich wkładamy). Skoro mają tę samą resztę z dzielenia przez 10, to ich różnica będzie miała resztę z dzielenia przez 10 równą 0, a więc będzie podzielna przez 10. To kończy dowód.

Przykład 2

Wybieramy $k+1$ liczb spośród $1, 2, 3, ..., 2k$. Wykaż, że wśród wybranych liczb będą dwie kolejne.

Przykład 2

Wybieramy $k+1$ liczb spośród $1, 2, 3, ..., 2k$. Wykaż, że wśród wybranych liczb będą dwie kolejne.

Dowód:

Przykład 2

Wybieramy $k+1$ liczb spośród $1, 2, 3, ..., 2k$. Wykaż, że wśród wybranych liczb będą dwie kolejne.

Dowód:
Ustalamy szufladki: $\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, ...\{2k-1, 2k\}$. Składają się one z dwóch kolejnych liczb. Tych szufladek jest k. Mamy $k+1$ liczb, a więc (zgodnie z zasadą szufladkową) w którejś szufladce muszą być dwie liczby - będą to nasze dwie kolejne liczby. To kończy dowód.

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1{\times}2^6{+}1{\times}2^5{+}0{\times}2^4{+}0{\times}2^3{+}1{\times}2^2{+}1{\times}2^1{+}0{\times}2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 13000_5$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 13000_5$

Zamień na system 12-tkowy:

- $200_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 13000_5$

Zamień na system 12-tkowy:

- $200_{10} = 1 \times 12^2 + 4 \times 12^1 + 8 \times 12^0 = 148_{12}$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 13000_5$

Zamień na system 12-tkowy:

- $200_{10} = 1 \times 12^2 + 4 \times 12^1 + 8 \times 12^0 = 148_{12}$
- $1573_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 13000_5$

Zamień na system 12-tkowy:

- $200_{10} = 1 \times 12^2 + 4 \times 12^1 + 8 \times 12^0 = 148_{12}$
- $1573_{10} = 10 \times 12^2 + 11 \times 12^1 + 1 \times 12^0 = AB1_{12}$

Zamiana systemów liczbowych

Zapisz w systemie 10-tkowym:

- $443_5 = 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 100 + 20 + 3 = 123_{10}$
- $1100110_2 = 1\times2^6+1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0 = 102_{10}$
- $A1D_{16} = 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 2589_{10}$

Zamień na system 5-tkowy:

- $99_{10} = 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 344_5$
- $1000_{10} = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 13000_5$

Zamień na system 12-tkowy:

- $200_{10} = 1 \times 12^2 + 4 \times 12^1 + 8 \times 12^0 = 148_{12}$
- $1573_{10} = 10 \times 12^2 + 11 \times 12^1 + 1 \times 12^0 = AB1_{12}$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamień na system 16-kowy:

- $6556_7 =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamień na system 16-kowy:

- $6556_7 = 2344_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamień na system 16-kowy:

- $6556_7 = 2344_{10} = 928_{16}$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamień na system 16-kowy:

- $6556_7 = 2344_{10} = 928_{16}$
- $2AA_{12} =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamień na system 16-kowy:

- $6556_7 = 2344_{10} = 928_{16}$
- $2AA_{12} = 418_{10} =$

Zamiana systemów liczbowych

By zamienić liczby między systemami różnymi od 10-tkowego warto po drodze przejść przez 10-tkowy.

Zamień na system 8-kowy:

- $4233_5 = 568_{10} = 1070_8$
- $ADEE_{16} = 44526_{10} = 126756_8$

Zamień na system 16-kowy:

- $6556_7 = 2344_{10} = 928_{16}$
- $2AA_{12} = 418_{10} = 1A2_{16}$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 =$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} =$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} =$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 =$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$
- $4020_{16} - A32_{16} =$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$
- $4020_{16} - A32_{16} = 35EE_{16}$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$
- $4020_{16} - A32_{16} = 35EE_{16}$
- $2341_5 \times 322_5 =$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$
- $4020_{16} - A32_{16} = 35EE_{16}$
- $2341_5 \times 322_5 = 1430402_5$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$
- $4020_{16} - A32_{16} = 35EE_{16}$
- $2341_5 \times 322_5 = 1430402_5$
- $BA2_{12} \times 23_{12}$

Arytmetyka w innych systemach

Wykonaj działania:

- $1010110_2 + 101011_2 = 10000001_2$
- $57A_{16} + CA2_{16} = 121C_{16}$
- $A1A1_{12} + B2B2_{12} = 19493_{12}$
- $12000_7 - 3434_7 = 5233_7$
- $4020_{16} - A32_{16} = 35EE_{16}$
- $2341_5 \times 322_5 = 1430402_5$
- $BA2_{12} \times 23_{12} = 227A6_{12}$

Reszty

Znajdź resztę z dzielenia 250^{250} przez 13.

Reszty

Znajdź resztę z dzielenia 250^{250} przez 13.

Szukamy rozwiązania $250^{250} = x \mod 13$, gdzie $0 \leqslant x < 13$.
$250 = 3 \mod 13$, mamy więc:

$$\begin{aligned} 250^{250} &= 3^{250} \mod 13 \\ &= (3^3)^{83} \times 3 \mod 13 \\ &= 27^{83} \times 3 \mod 13 \\ &= 1 \times 3 \mod 13 \\ &= 3 \mod 13 \end{aligned}$$

Równania - przykład 1

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x = 2 \mod 5 \\ x = 3 \mod 7 \end{cases}$$

oraz znajdź rozwiązanie tego układu spełniające warunek $80 < x < 100$.

Równania - przykład 1 rozwiązanie

$x = 2 \mod 5$ oznacza, że $x = 5k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Równania - przykład 1 rozwiązanie

$x = 2 \mod 5$ oznacza, że $x = 5k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiegu równania:

Równania - przykład 1 rozwiązanie

$x = 2 \mod 5$ oznacza, że $x = 5k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiegu równania:

$$5k + 2 = 3 \mod 7$$
$$5k = 1 \mod 7$$
$$15k = 3 \mod 7$$
$$k = 3 \mod 7$$

Równania - przykład 1 rozwiązanie

$x = 2 \mod 5$ oznacza, że $x = 5k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiegu równania:

$$5k + 2 = 3 \mod 7$$
$$5k = 1 \mod 7$$
$$15k = 3 \mod 7$$
$$k = 3 \mod 7$$

Czyli $k = 7m + 3$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Otrzymujemy:

$$x = 5(7m + 3) + 2 = 35m + 17$$

Równania - przykład 1 rozwiązanie

$x = 2 \mod 5$ oznacza, że $x = 5k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiegu równania:

$$\begin{aligned} 5k + 2 &= 3 \mod 7 \\ 5k &= 1 \mod 7 \\ 15k &= 3 \mod 7 \\ k &= 3 \mod 7 \end{aligned}$$

Czyli $k = 7m + 3$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$. Otrzymujemy:

$$x = 5(7m + 3) + 2 = 35m + 17$$

Rozwiązanie spełniające warunek $80 < x < 100$, to $x = 87$ (dla $m = 2$).

Równania - przykład 2

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x = 7 \mod 11 \\ 3x = 5 \mod 7 \end{cases}$$

oraz znajdź rozwiązania tego układu spełniające warunek $200 < x < 300$.

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Rozwiązujemy pierwsze równanie:

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$2x = 7 \mod 11$$
$$12x = 42 \mod 11$$
$$x = 9 \mod 11$$

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$2x = 7 \mod 11$$
$$12x = 42 \mod 11$$
$$x = 9 \mod 11$$

Otrzymujemy $x = 11k + 9$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$2x = 7 \mod 11$$
$$12x = 42 \mod 11$$
$$x = 9 \mod 11$$

Otrzymujemy $x = 11k + 9$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy:

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$2x = 7 \mod 11$$
$$12x = 42 \mod 11$$
$$x = 9 \mod 11$$

Otrzymujemy $x = 11k + 9$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy:

$$3(11k + 9) = 5 \mod 7$$
$$33k + 27 = 5 \mod 7$$
$$5k + 6 = 5 \mod 7$$
$$5k = 6 \mod 7$$
$$15k = 18 \mod 7$$
$$k = 4 \mod 7$$

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$2x = 7 \mod 11$$
$$12x = 42 \mod 11$$
$$x = 9 \mod 11$$

Otrzymujemy $x = 11k + 9$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy:

$$3(11k + 9) = 5 \mod 7$$
$$33k + 27 = 5 \mod 7$$
$$5k + 6 = 5 \mod 7$$
$$5k = 6 \mod 7$$
$$15k = 18 \mod 7$$
$$k = 4 \mod 7$$

Czyli $k = 7m + 4$, gdzie $m \in \mathbb{Z}$.

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Mamy więc:

$$x = 11(7m + 4) + 9 = 77m + 53$$

Równania - przykład 2 rozwiązanie

Mamy więc:

$$x = 11(7m + 4) + 9 = 77m + 53$$

Rozwiązania, które spełniają warunek $100 < x < 200$ to $x = 207$ (dla $m = 2$) oraz $x = 284$ (dla $m = 3$).

Test

Na teście będzie 5 zadań. Jedno zadanie wprowadzające z działu *basic proofs*. Nie będzie ono punktowane. Trzeba będzie je dobrze zrobić, by zaliczyć test. Pozostałe 4 zadania będę z 4 pozostałych działów. Każde po 5 punktów. Test jest zaliczony od 15 punktów.