Trudniejsze przykłady z logarytmów

Na prezentacji omówimy najpierw dwa proste przykłady, a później dwa znacznie trudniejsze.

Przykład 1

Wiedząc, że $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_2 150$.

Przykład 1

Wiedząc, że $\log_2 3 = a$ i $\log_2 5 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_2 150$.

Zapisujemy $150 = 2 \times 3 \times 5^2$, czyli:

$$\log_2 150 = \log_2(2 \times 3 \times 5^2) = \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 5^2 = 1 + a + 2b$$

Przykład 2

Wiedząc, że $\log_2 3 = a$ i $\log_2 7 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_2 \frac{12}{7}$.

Przykład 2

Wiedząc, że $\log_2 3 = a$ i $\log_2 7 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_2 \frac{12}{7}$.

Zapisujemy $12 = 2^2 \times 3$, czyli:

$$\log_2 \frac{12}{7} = \log_2 \frac{2^2 \times 3}{7} = \log_2 2^2 + \log_2 3 - \log_2 7 = 2 + a - b$$

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 240$.

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 240$.

Musimy wyrazić 240 przy pomocy $20, 15$ i 3. Rozkładamy wszystkie te liczby na czynniki pierwsze:

$$20 = 2^2 \times 5,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$3 = 3,$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5.$$

Przykład 3

Wiedząc, że $\log_3 20 = a$ i $\log_3 15 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_3 240$.

Musimy wyrazić 240 przy pomocy $20, 15$ i 3. Rozkładamy wszystkie te liczby na czynniki pierwsze:

$$20 = 2^2 \times 5,$$
$$15 = 3 \times 5,$$
$$3 = 3,$$
$$240 = 2^4 \times 3 \times 5.$$

By otrzymać 240 musimy mieć 2^4. Potęgi dwójki uzyskamy tylko z 20, a więc możemy zacząć zapisywać $240 = 20^2 \times ...$, ale teraz w zapisie mamy już dwie potęgi 5, a chcemy tylko jedną, więc jednej trzeba się pozbyć. Potęga 5 występuje w 15, więc możemy zapisać $240 = 20^2 \times 15^{-1} \times ...$. Liczymy teraz potęgi 3. Mamy ich (-1), a chcemy mieć 1. Musimy więc pomnożyć jeszcze przez 3^2.

Przykład 4

Ostatecznie:

$$240 = 20^2 \times 15^{-1} \times 3^2$$

Przykład 4

Ostatecznie:

$$240 = 20^2 \times 15^{-1} \times 3^2$$

Teraz zapisanie logarytmu jest już proste:

$$\log_3 240 = \log_3(20^2 \times 15^{-1} \times 3^2) = 2a - b + 2$$

Przykłady 2

Wiedząc, że $\log_5 18 = a$ i $\log_5 10 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_5 1350$.

Przykłady 2

Wiedząc, że $\log_5 18 = a$ i $\log_5 10 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_5 1350$.

Zapisujemy

$$18 = 2 \times 3^2,$$

$$10 = 2 \times 5,$$

$$5 = 5,$$

$$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2.$$

Przykłady 2

Wiedząc, że $\log_5 18 = a$ i $\log_5 10 = b$, wyraź przy pomocy a i b $\log_5 1350$.

Zapisujemy

$$18 = 2 \times 3^2,$$
$$10 = 2 \times 5,$$
$$5 = 5,$$
$$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2.$$

Zaczniemy od potęg 3, bo one występują tylko w 18. Musimy mieć 3^3, więc zaczynamy zapisywać $1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times \ldots$. Dostajemy $2^{\frac{3}{2}}$, a chcemy mieć 2^1, korzystamy z 10 i zapisujemy $1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times \ldots$. Teraz 2 i 3 się zgadzają, ale mamy $5^{-\frac{1}{2}}$, a chcemy 5^2. Wykorzystujemy $5^{\frac{5}{2}}$

Przykład 2

Ostatecznie:

$$1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}$$

Przykład 2

Ostatecznie:

$$1350 = 18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}$$

Czyli

$$\log_5 1350 = \log_5(18^{\frac{3}{2}} \times 10^{-\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{5}{2}}) = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{5}{2}$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.