Logarytmy

Musimy umieć obliczyć proste logarytmy bez użycia kalkulatora.

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \ \Leftrightarrow \ a^c = b$$

Co ta definicja oznacza?

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Co ta definicja oznacza? Po pierwsze ważne są założenia: liczba a, którą nazywamy podstawą logarytmu musi być większa od 0 i różna od 1, a liczba b, czyli liczba logarytmowana musi być większa od 0.

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Co ta definicja oznacza? Po pierwsze ważne są założenia: liczba a, którą nazywamy podstawą logarytmu musi być większa od 0 i różna od 1, a liczba b, czyli liczba logarytmowana musi być większa od 0.

Wyrażenia takie, jak $\log_1 3$, $\log_{-2} 5$, czy $\log_4(-1)$ nie są określone w zbiorze liczb rzeczywistych (podobnie jak np. $\sqrt{-6}$).

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Po drugie wyrażenie $\log_a b = c$ oznacza, że liczba a podniesiona do potęgi c da liczbę b.

Definicja

Dla $a > 0$, $a \neq 1$ oraz $b > 0$ mamy:

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

Po drugie wyrażenie $\log_a b = c$ oznacza, że liczba a podniesiona do potęgi c da liczbę b. W praktyce, gdy chcemy obliczyć $\log_a b$, zadajemy sobie pytanie - do jakiej potęgi trzeba podnieść a, by otrzymać b?

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3}$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8}$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ponieważ $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ponieważ $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

e) $\log_4 2$

Przykłady 1

Oblicz:

a) $\log_2 16 = 4$, ponieważ $2^4 = 16$.

b) $\log_5 125 = 3$, ponieważ $5^3 = 125$.

c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, ponieważ $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

d) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, ponieważ $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

e) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, ponieważ $4^{\frac{1}{2}} = 2$.

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100$

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1$

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10}$

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

d) $\log \frac{\sqrt{10}}{10}$

Przykłady 2

Uwaga: jeśli w podstawie logarytmu nie występuje żadna liczba, to domyślnie podstawą jest liczba 10.

a) $\log 100 = 2$, ponieważ $10^2 = 100$.

b) $\log 0.1 = -1$, ponieważ $10^{-1} = 0.1$.

c) $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, ponieważ $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.

d) $\log \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{1}{2}$, ponieważ $10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Przykłady 3

a) $\log_4 8$

Przykłady 3

a) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, w tego typu przypadkach warto zamienić obie liczby na potęgi tej samej liczby (w tym przypadku 2). $4 = 2^2$, a $8 = 2^3$. Pytamy, do której potęgi trzeba podnieść 2^2, by otrzymać 2^3. Teraz odpowiedź jest prosta $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
$\frac{1}{2}$ pozbywamy się 2 w wykładniku 2^2, a później podnosząc do 3 otrzymujemy 2^3.

Przykłady 3

a) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, w tego typu przypadkach warto zamienić obie liczby na potęgi tej samej liczby (w tym przypadku 2). $4 = 2^2$, a $8 = 2^3$. Pytamy, do której potęgi trzeba podnieść 2^2, by otrzymać 2^3. Teraz odpowiedź jest prosta $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
$\frac{1}{2}$ pozbywamy się 2 w wykładniku 2^2, a później podnosząc do 3 otrzymujemy 2^3.

b) $\log_8 4\sqrt{2}$

Przykłady 3

a) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, w tego typu przypadkach warto zamienić obie liczby na potęgi tej samej liczby (w tym przypadku 2). $4 = 2^2$, a $8 = 2^3$. Pytamy, do której potęgi trzeba podnieść 2^2, by otrzymać 2^3. Teraz odpowiedź jest prosta $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
$\frac{1}{2}$ pozbywamy się 2 w wykładniku 2^2, a później podnosząc do 3 otrzymujemy 2^3.

b) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$, zamieniamy 8 na 2^3, a $4\sqrt{2}$ na $2^{\frac{5}{2}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

Przykłady 3

a) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, w tego typu przypadkach warto zamienić obie liczby na potęgi tej samej liczby (w tym przypadku 2). $4 = 2^2$, a $8 = 2^3$. Pytamy, do której potęgi trzeba podnieść 2^2, by otrzymać 2^3. Teraz odpowiedź jest prosta $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
$\frac{1}{2}$ pozbywamy się 2 w wykładniku 2^2, a później podnosząc do 3 otrzymujemy 2^3.

b) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$, zamieniamy 8 na 2^3, a $4\sqrt{2}$ na $2^{\frac{5}{2}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3}$

Przykłady 3

a) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$, w tego typu przypadkach warto zamienić obie liczby na potęgi tej samej liczby (w tym przypadku 2). $4 = 2^2$, a $8 = 2^3$. Pytamy, do której potęgi trzeba podnieść 2^2, by otrzymać 2^3. Teraz odpowiedź jest prosta $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$.
$\frac{1}{2}$ pozbywamy się 2 w wykładniku 2^2, a później podnosząc do 3 otrzymujemy 2^3.

b) $\log_8 4\sqrt{2} = \frac{5}{6}$, zamieniamy 8 na 2^3, a $4\sqrt{2}$ na $2^{\frac{5}{2}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = -\frac{2}{3}$, zamieniamy $\frac{1}{9}$ na 3^{-2}, a $3\sqrt[3]{3}$ na $3^{\frac{4}{3}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $-\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

Przykłady 4

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4}$

Przykłady 4

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$, zamieniamy $\sqrt{8}$ na $2^{\frac{3}{2}}$, a $\frac{1}{4}$ na 2^{-2}. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{2}{3} \times -2 = -\frac{4}{3}$

Przykłady 4

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$, zamieniamy $\sqrt{8}$ na $2^{\frac{3}{2}}$, a $\frac{1}{4}$ na 2^{-2}. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{2}{3} \times -2 = -\frac{4}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2}$

Przykłady 4

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$, zamieniamy $\sqrt{8}$ na $2^{\frac{3}{2}}$, a $\frac{1}{4}$ na 2^{-2}. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{2}{3} \times -2 = -\frac{4}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$, zamieniamy $\frac{1}{8}$ na 2^{-3}, a $2\sqrt[5]{2}$ na $2^{\frac{6}{5}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $-\frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = -\frac{2}{5}$

Przykłady 4

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$, zamieniamy $\sqrt{8}$ na $2^{\frac{3}{2}}$, a $\frac{1}{4}$ na 2^{-2}. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{2}{3} \times -2 = -\frac{4}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$, zamieniamy $\frac{1}{8}$ na 2^{-3}, a $2\sqrt[5]{2}$ na $2^{\frac{6}{5}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $-\frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = -\frac{2}{5}$

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81}$

Przykłady 4

a) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4} = -\frac{4}{3}$, zamieniamy $\sqrt{8}$ na $2^{\frac{3}{2}}$, a $\frac{1}{4}$ na 2^{-2}. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $\frac{2}{3} \times -2 = -\frac{4}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{8}} 2\sqrt[5]{2} = -\frac{2}{5}$, zamieniamy $\frac{1}{8}$ na 2^{-3}, a $2\sqrt[5]{2}$ na $2^{\frac{6}{5}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $-\frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = -\frac{2}{5}$

c) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt[5]{81} = \frac{12}{5}$, zamieniamy $\sqrt[3]{3}$ na $3^{\frac{1}{3}}$, a $\sqrt[5]{81}$ na $3^{\frac{4}{5}}$. Teraz widzimy, że musimy podnieść do $3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$

Na wejściówkę trzeba umieć policzyć wartość logarytmu z danej liczby w przypadku, gdy podstawa i liczba logarytmowana dają się łatwo zapisać jako potęgi tej samej liczby.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.