Wielomiany

Musimy znać i umieć wykrzystywać twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian stopnia pierwszego.

Twierdzenie o reszcie

Twierdzenie o reszcie

Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $ax + b$ jest równa $P(-\frac{b}{a})$

Twierdzenie o reszcie

Twierdzenie o reszcie

Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $ax + b$ jest równa $P(-\frac{b}{a})$

Twierdzenie o reszcie - prostsza wersja

Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $P(a)$

Twierdzenie o reszcie

Twierdzenie o reszcie

Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $ax + b$ jest równa $P(-\frac{b}{a})$

Twierdzenie o reszcie - prostsza wersja

Reszta z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $P(a)$

W praktyce chodzi o to, że resztą z dzielenia jest wartość wielomianu w miejscu zerowym dzielnika.

Dowód twierdznia o reszcie

Gdy podzielimy $P(x)$ przez $ax + b$ otrzymamy:

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + r$$

gdzie $Q(x)$ to wynik dzielenia, a r to reszta. Wiemy, że reszta musi być stałą, gdyż jej stopień musi być niższy od stopnia $ax + b$.

Dowód twierdznia o reszcie

Gdy podzielimy $P(x)$ przez $ax + b$ otrzymamy:

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + r$$

gdzie $Q(x)$ to wynik dzielenia, a r to reszta. Wiemy, że reszta musi być stałą, gdyż jej stopień musi być niższy od stopnia $ax + b$.

Podstawiając pod x miejsce zerowe dzielnika (czyli w tym przypadku $x = -\frac{b}{a}$)

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times Q(x) + r$$

czyli mamy $r = P(-\frac{b}{a})$

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.
- $P(x) = x^{20} + x^{19} + x + 33$, $D(x) = x + 1$.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.
- $P(x) = x^{20} + x^{19} + x + 33$, $D(x) = x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy -1.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.
- $P(x) = x^{20} + x^{19} + x + 33$, $D(x) = x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy -1. $r = P(-1) = 32$.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.
- $P(x) = x^{20} + x^{19} + x + 33$, $D(x) = x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy -1. $r = P(-1) = 32$.
- $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 1$, $D(x) = 2x + 1$.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.
- $P(x) = x^{20} + x^{19} + x + 33$, $D(x) = x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy -1. $r = P(-1) = 32$.
- $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 1$, $D(x) = 2x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy $-\frac{1}{2}$.

Przykłady

Oblicz resztę z dzielenia poniższych wielomianów przez dane dwumiany:

- $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $D(x) = x - 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy 1. $r = P(1) = 2$.
- $P(x) = x^{20} + x^{19} + x + 33$, $D(x) = x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy -1. $r = P(-1) = 32$.
- $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 1$, $D(x) = 2x + 1$. By obliczyć resztę pod x podstawiamy $-\frac{1}{2}$. $r = P(-\frac{1}{2}) = 5$.

Dzielenie przez wielomiany wyższego stopnia

Jeśli dzielimy wielomian przez wielomian stopnia drugiego, to reszta będzie stopnia co najwyżej pierwszego. Czyli:

$$P(x) = D(x)Q(x) + ax + b$$

Dzielenie przez wielomiany wyższego stopnia

Jeśli dzielimy wielomian przez wielomian stopnia drugiego, to reszta będzie stopnia co najwyżej pierwszego. Czyli:

$$P(x) = D(x)Q(x) + ax + b$$

Często zadania polegają na tym, by obliczyć tę resztą. Warto zauważyć, że nie jest nam potrzebna znajomość $P(x)$, a jedynie wartości jakie przyjmuje $P(x)$ dla miejsc zerowych $D(x)$. Zobaczymy to na przykładzie.

Przykład 1

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $(x-1)(x+2)$, jeśli $P(1) = 1$ i $P(-2) = 0$.

Przykład 1

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $(x-1)(x+2)$, jeśli $P(1)=1$ i $P(-2)=0$.

Dzielimy przez wielomian stopnia drugiego, więc reszta będzie stopnia co najwyżej pierwszego. Zapiszmy:

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

Podstawiając pod x kolejno 1 oraz -2 otrzymamy dwa równania, które pozwolą nam znaleźć a i b. (Podstawiając 1 i -2 cała część $(x-1)(x+2)Q(x)$ się zeruje, więc w ogóle nie musimy znać $Q(x)$.)

Przykład 1

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $(x-1)(x+2)$, jeśli $P(1) = 1$ i $P(-2) = 0$.

Przykład 1

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $(x-1)(x+2)$, jeśli $P(1)=1$ i $P(-2)=0$.

$$\begin{aligned} 1 =& P(1) = a + b \\ 0 =& P(-2) = -2a + b \end{aligned}$$

Przykład 1

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $(x-1)(x+2)$, jeśli $P(1)=1$ i $P(-2)=0$.

$$\begin{aligned} 1 =& P(1) = a + b \\ 0 =& P(-2) = -2a + b \end{aligned}$$

Mamy układ równań, który bez problemu rozwiązujemy. Otrzymujemy: $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$. Czyli resztą z dzielenia będzie $R(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

Przykład 2

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x^2 - 4x + 3$, jeśli $P(1) = 3$ i $P(3) = 5$.

Przykład 2

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x^2 - 4x + 3$, jeśli $P(1) = 3$ i $P(3) = 5$.

Tak przypadkowo się składa, że 1 i 3 to miejsca zerowe wielomianu, przez który dzielimy, więc możemy ułożyć dwa równania:

$$\begin{aligned} 3 = & P(1) = a + b \\ 5 = & P(3) = 3a + b \end{aligned}$$

Przykład 2

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x^2 - 4x + 3$, jeśli $P(1) = 3$ i $P(3) = 5$.

Tak przypadkowo się składa, że 1 i 3 to miejsca zerowe wielomianu, przez który dzielimy, więc możemy ułożyć dwa równania:

$$\begin{aligned} 3 =& P(1) = a + b \\ 5 =& P(3) = 3a + b \end{aligned}$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $a = 1$ i $b = 2$, czyli reszta to $R(x) = x + 2$.

Dzielenie przez wielomiany wyższego stopnia

Jeśli dzielimy wielomian przez wielomian stopnia trzeciego, to reszta będzie stopnia co najwyżej drugiego. Czyli:

$$P(x) = D(x)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

Dzielenie przez wielomiany wyższego stopnia

Jeśli dzielimy wielomian przez wielomian stopnia trzeciego, to reszta będzie stopnia co najwyżej drugiego. Czyli:

$$P(x) = D(x)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

By znaleźć resztę nie znając wzoru $P(x)$ musielibyśmy móc ułożyć trzy równania (gdyż mamy trzy niewiadome). Gdybyśmy mieli informacje o wartości $P(x)$ w miejscach zerowych $D(x)$, to by wystarczyło (znów $D(x)Q(x)$ się zeruje podstawiając miejsca zerowe $D(x)$).

Przykład 3

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x(x-1)(x+5)$, jeśli $P(0) = 2$, $P(1) = 2$ i $P(-5) = 6$.

Przykład 3

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x(x-1)(x+5)$, jeśli $P(0) = 2$, $P(1) = 2$ i $P(-5) = 6$.

Znów: 0, 1 i -5 to miejsca zerowe wielomianu, przez który dzielimy, więc możemy ułożyć trzy równania:

$$\begin{aligned} 2 =& P(0) = c \\ 2 =& P(1) = a + b + c \\ 6 =& P(-5) = 25a - 5b + c \end{aligned}$$

Przykład 3

Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez $x(x-1)(x+5)$, jeśli $P(0)=2$, $P(1)=2$ i $P(-5)=6$.

Znów: 0, 1 i -5 to miejsca zerowe wielomianu, przez który dzielimy, więc możemy ułożyć trzy równania:

$$\begin{aligned} 2 =& P(0) = c \\ 2 =& P(1) = a+b+c \\ 6 =& P(-5) = 25a-5b+c \end{aligned}$$

Rozwiązujemy i otrzymujemy $a=\frac{2}{15}$, $b=-\frac{2}{15}$ i $c=2$, czyli reszta to $R(x)=\frac{2}{15}x^2-\frac{2}{15}x+2$.

Wejściówka

Na wejściówce będzie przykład podobny do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.