Zadania - poziom podstawowy

1. Oblicz miejsca zerowe (zależne od parametru a) następujących funkcji:

   (a) $f(x) = ax + a - 1$ (b) $g(x) = ax + x - a$ (c) $h(x) = a^2x - a$

   (a) $x = \frac{1-a}{a}$ (b) $x = \frac{a}{a+1}$ (c) $x = \frac{1}{a}$

2. Dla jakich wartości parametru m poniższe proste są równoległe:

   (a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = (m-1)x + m \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y + m = 0 \\ 3mx + y - 1 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} mx - y - 1 = 0 \\ x - my - 3 = 0 \end{cases}$

   (a) $m = 3$ (b) $m = -\frac{1}{3}$ (c) $m = \pm 1$

3. Dla jakich wartości parametru m poniższe proste są prostopadłe:

   (a) $\begin{cases} y = -\frac{1}{9}x - 2 \\ y = m^2x + m \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ 2x + my - 1 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x - my - 1 = 0 \\ x + y + 7 = 0 \end{cases}$

   (a) $m = \pm 3$ (b) $m = -1$ (c) $m = 3$

4. Oblicz:

   (a) $\sin 1290^\circ$ (b) $\cos(-870^\circ)$ (c) $\operatorname{tg} 945^\circ$

   (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1

5. α jest kątem rozwartym i $\sin\alpha = \frac{2}{5}$. Oblicz:

(a) $\cos\alpha$ (b) $\operatorname{tg}\alpha$ (c) $\operatorname{ctg}\alpha$

(a) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ (b) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$ (c) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

6. α leży w trzeciej ćwiartce i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$. Oblicz:

(a) $\operatorname{ctg}\alpha$ (b) $\sin\alpha$ (c) $\cos\alpha$

(a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{3}$ (b) $\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{58}}{58}$ (c) $\cos\alpha = -\frac{7\sqrt{58}}{58}$

7. Oblicz kąt, pod którym następujące proste przecinają oś OX:

(a) $y = \sqrt{3}x - 3$ (b) $y = -x + 3$ (c) $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$

(a) 60° (b) 135° (c) 150°

8. Znajdź równanie prostej, która przecina oś OX pod kątem 120° i przechodzi przez punkt $(\sqrt{3}, 6)$.

$$y = -\sqrt{3}x + 9$$

9. Rozwiąż następujące nierówności:

(a) $x^2 - 8x > 0$ (b) $x^2 - 16 \leqslant 0$ (c) $9x - x^2 \geqslant 0$

(c) $6x^2 + x - 2 \geqslant 0$ (d) $3x^2 + 14x < 5$ (e) $2x^2 + x \leqslant 3$

(a) $x \in (-\infty, 0) \cup (8, \infty)$ (b) $x \in \langle -4, 4 \rangle$ (c) $x \in \langle 0, 9 \rangle$

(c) $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ (d) $x \in (-5, \frac{1}{3})$ (e) $x \in \langle -\frac{3}{2}, 1 \rangle$

10. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 3x$. Zapisz wzór funkcji, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor:

    (a) $\vec{w} = [1, 1]$ (b) $\vec{w} = [-3, 2]$ (c) $\vec{w} = [-2, -1]$

(a) $f(x) = x^2 + x - 1$ (b) $f(x) = x^2 + 9x + 20$ (c) $f(x) = x^2 + 7x + 9$

11. Oblicz wartość wyrażenia $\cos 1590^\circ \cdot \operatorname{tg}(-840^\circ)$.
    -1.5

12. Wykaż, że jeśli $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$, to wartość wyrażania:

$$\left(\frac{1 + \cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{1 + \sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \right) \cdot \sin\alpha$$

jest stała.

Wartość wyrażenia zawsze wynosi -2.

13. W trójkącie ABC bok AB jest o 5 dłuższy od boku AC, zaś $\angle ACB = 150^\circ$. Wiedząc, że $|BC| = 3\sqrt{3}$, oblicz:
    (a) obwód trójkąta ABC,
    (b) promień koła opisanego na trójkącie ABC,
    (c) sinus kąta wewnętrznego przy wierzchołku A.

(a) $9 + 3\sqrt{3}$ (b) 7 (c) $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

Zadania - poziom rozszerzony

14. Dla jakiej wartości parametru k rozwiązaniem równań:

$$\begin{cases} 3x - 2y = k - 7 \\ 2x + 4y = 6k + 6 \end{cases}$$

jest para liczba (x, y) spełniająca warunek

$$|x| - |y| \leqslant 0$$

Rozwiązanie układu $\begin{cases} x = k - 1 \\ y = k + 2 \end{cases}$ Nierówność prawdziwa dla $k \in \langle -0.5, \infty)$

15. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = (m + 2)x + m^2 - 4$.
    (a) Wyznacz wartość parametru m, dla którego wykres funkcji f przechodzi tylko przez I i III ćwiartkę układu współrzędnych.
    (b) Wyznacz wartość parametru m, dla którego miejsce zerowe funkcji f należy do przedziału $\langle 3m - 6, 3m + 10\rangle$.

(a) $m = 2$ (b) $m \in (-2, 2\rangle$

16. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $(\sqrt{3}, 5)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,x + 3$$

17. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2-x}{|x-2|} \cdot x + 2$, a następnie określ libczę rozwiązań równania $|f(x)| = p$, w zależności od parametru p.

Funkcja określona jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & dla x > 2 \\ x+2 & dla x < 2 \end{cases}$$

- dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty, 0) \cup (2, 4)$,
- jedno rozwiązanie dla $m = 2$,
- brak rozwiązań dla $m \in \langle 0, 2) \cup \langle 4, \infty)$

18. Dane są funkcje kwadratowe $f(x) = x^2 - 2ax - c$ oraz $g(x) = ax^2 - bx + c$.
    (a) Wyznacz wszystkie wartości parametrów a, b i c, wiedząc, że funkcja f ma tylko jedno miejsce zerowe, natomiast funkcja g przyjmuje wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.
    (b) Rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$.

    (a) $a = 3, b = 6, c = -9$ (b) $x = \pm 3$

19. Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi 6, a miara kąta między tymi bokami jest równa 120°. Jaką najmniejszą wartość może mieć obwód tego trójkąta?

    Najmniejszy obwód to $6 + 3\sqrt{3}$.

20. Dany jest układ równań $\begin{cases} 5x + y = -m + 13 \\ -3x - 2y = -5m - 5 \end{cases}$. Wiedząc, że para (x, y) jest rozwiązaniem tego układu, znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $x^2 - 2y$. Dla jakiej wartości parametru m jest ona osiągana?

    Rozwiązanie układu $\begin{cases} x = -m + 3 \\ y = 4m - 2 \end{cases}$ Najmniejsza wartość -36 dla $m = 7$

21. Wyznacz te wartości parametru m, dla których rozwiązania równania $x^2 + mx + (m+2) = 0$ spełniają warunek $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 > 10x_1 + 10x_2$.

$$m \in \langle 2+2\sqrt{3}, 8)$$

22. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których zbiór rozwiązań nierówności $(m-x)(x+2m-3) \geqslant 0$ zawiera się w przedziale $(-2, 3\rangle$

$$m \in \langle 0, 2.5)$$

23. Rozwiąż nierówność:

$$(x-5)^2 - 5|x-5| + 6 \geqslant 0$$

$$x \in (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, 7\rangle \cup \langle 8, \infty)$$