Prezentacja powtórzeniowa

Ta prezentacja ma na celu pomoc w przygotowaniu do sprawdzianu semestralnego. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań, które tu się pojawią warto:

Ta prezentacja ma na celu pomoc w przygotowaniu do sprawdzianu semestralnego. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań, które tu się pojawią warto:

- przerobić wszystkie zadania ze zbioru (oczywiście z działów, które przerabialiśmy),

Ta prezentacja ma na celu pomoc w przygotowaniu do sprawdzianu semestralnego. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań, które tu się pojawią warto:

- przerobić wszystkie zadania ze zbioru (oczywiście z działów, które przerabialiśmy),
- przeanalizować przykłady z podręcznika oraz zrobić zadania z części "sprawdź, czy rozumiesz".

Ta prezentacja ma na celu pomoc w przygotowaniu do sprawdzianu semestralnego. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań, które tu się pojawią warto:

- przerobić wszystkie zadania ze zbioru (oczywiście z działów, które przerabialiśmy),
- przeanalizować przykłady z podręcznika oraz zrobić zadania z części "sprawdź, czy rozumiesz".
- przejrzeć raz jeszcze prezentacje z omawianych tematów.

Prezentacja ma prostą strukturę. Na jednym slajdzie zadania, na kolejnym odpowiedź, na kolejnym całe rozwiązanie (wyświetlane krok po kroku). Warto najpierw spróbować zrobić zadanie samemu, później sprawdzić odpowiedź, a jeśli się nie zgadza, to przeanalizować rozwiązanie.

Prezentacja ma prostą strukturę. Na jednym slajdzie zadania, na kolejnym odpowiedź, na kolejnym całe rozwiązanie (wyświetlane krok po kroku). Warto najpierw spróbować zrobić zadanie samemu, później sprawdzić odpowiedź, a jeśli się nie zgadza, to przeanalizować rozwiązanie. Niektóre zadania to dowody - tam oczywiście nie ma odpowiedzi, jest tylko zadanie + na kolejnym slajdzie dowód.

Zadanie 1

Consider the following inequalities:

$$\begin{array}{ll} (1) & (x-2)^3 + (x-3)^2 > x(x+2)^2 - (3x-2)(3x+2) \\ (2) & ||x-1|-2| \leqslant 2 \end{array}$$

Let A be the set of elements satisfying the first inequality and B the set of elements satisfying the second inequality.

(a) Find A and B.

(b) Write down $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ and $(B - A)'$.

Zadanie 1 - odpowiedź

(a) $A = (1.5, \infty)$ and $B = \langle -3, 5 \rangle$.

(b) $A \cap B = (1.5, 5\rangle$, $A \cup B = \langle -3, \infty)$, $A - B = (5, \infty)$ and $(B - A)' = (-\infty, -3) \cup (1.5, \infty)$.

Zadanie 1 - rozwiązanie

Zbiór A:

$$(x-2)^3+(x-3)^2 > x(x+2)^2-(3x-2)(3x+2)$$

$$x^3-6x^2+12x-8+x^2-6x+9 > x^3+4x^2+4x-9x^2+4$$

$$6x+1 > 4x+4$$

$$2x > 3$$

$$x > 1.5$$

Zadanie 1 - rozwiązanie

Zbiór A:

$$(x-2)^3+(x-3)^2 > x(x+2)^2-(3x-2)(3x+2)$$
$$x^3-6x^2+12x-8+x^2-6x+9 > x^3+4x^2+4x-9x^2+4$$
$$6x+1 > 4x+4$$
$$2x > 3$$
$$x > 1.5$$

Zbiór B

$$\begin{aligned} ||x-1|-2| &\leqslant 2 \\ |x-1|-2 \geqslant -2 \quad &\wedge \quad |x-1|-2 \leqslant 2 \\ |x-1| \geqslant 0 \quad &\wedge \quad |x-1| \leqslant 4 \\ x \in \mathbb{R} \quad &\wedge \left(\, x-1 \geqslant -4 \quad \wedge \quad x-1 \leqslant 4 \,\right) \\ x \in \mathbb{R} \quad &\wedge \left(\, x \geqslant -3 \quad \wedge \quad x \leqslant 5 \,\right) \end{aligned}$$

Zadanie 2

Od nowego roku cenę dzierżawy sklepu z kapeluszami zwiększono o 15%, a po kolejnym roku o kolejne 10%. O ile procent zwiększono cenę dzierżawy w stosunku do ceny sprzed dwóch lat?

Zadanie 2 - odpowiedź

O 26.5%.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Cena początkowa: x.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Cena początkowa: x.
Po pierwszej podwyżce mamy $1.15x$

Zadanie 2 - rozwiązanie

Cena początkowa: x.
Po pierwszej podwyżce mamy $1.15x$
Po drugiej podwyće mamy $1.1 \times 1.15x = 1.265x = 126.5\%x$.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Cena początkowa: x.
Po pierwszej podwyżce mamy $1.15x$
Po drugiej podwyće mamy $1.1 \times 1.15x = 1.265x = 126.5\%x$. Czyli cena wzrosła o 26.5%.

Zadanie 3

Linie lotnicze prognozowały, że w roku 2015 z ich usług skorzysta 4 395 000 pasażerów. Tymczasem rzeczywista liczba pasażerów wyniosła 4 425 674. Oblicz błąd bezwględny, i procentowy prognozy. Zaokrąglij błęd procentowy do jednego miejsca po przecinku.

Zadanie 3 - odpowiedzi

$$\epsilon = 30674$$
$$\epsilon_{\%} \approx 0.7\%$$

Zadanie 3 - rozwiązanie

Exact value $v_e = 4425674$. Approximated value $v_a = 4395000$.

$$\epsilon = |v_e - v_a| = 30674$$

$$\epsilon_{\%} = \frac{|v_e - v_a|}{v_e} \times 100\% \approx 0.7\%$$

Zadanie 4

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej całkowitej liczby n, liczba $2^{n+3} + 2^n - 3^{n+2}$ jest podzielne przez 9.

Zadanie 4 - rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
&2^{n+3} + 2^n - 3^{n+2} = \\
=&2^3 \cdot 2^n + 2^n - 3^2 \cdot 3^n = \\
=&8 \cdot 2^n + 2^n - 9 \cdot 3^n = \\
=&9 \cdot 2^n - 9 \cdot 3^n = \\
=&9(2^n - 3^n)
\end{aligned}
$$

Zadanie 4 - rozwiązanie

$$\begin{aligned}
&2^{n+3} + 2^n - 3^{n+2} = \\
=&2^3 \cdot 2^n + 2^n - 3^2 \cdot 3^n = \\
=&8 \cdot 2^n + 2^n - 9 \cdot 3^n = \\
=&9 \cdot 2^n - 9 \cdot 3^n = \\
=&9(2^n - 3^n)
\end{aligned}$$

$2^n - 3^n$ jest liczbą całkowitą, a więc nasze oryginalne wyrażenie jest wielokrotnością 9, czyli jest podzielne przez 9.

Zadanie 5

Wykaż, że liczba $2^{21} + 2^{23} + 2^{24}$ jest podzielna przez 25.

Zadanie 5 - rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
&2^{21} + 2^{24} + 2^{25} = \\
=&2^{21}(1 + 2^3 + 2^4) = \\
=&2^{21}(1 + 8 + 16) = \\
=&25 \cdot 2^{21}
\end{aligned}
$$

Zadanie 5 - rozwiązanie

$$\begin{aligned} &2^{21}+2^{24}+2^{25}= \\ =&2^{21}(1+2^3+2^4)= \\ =&2^{21}(1+8+16)= \\ =&25\cdot 2^{21} \end{aligned}$$

2^{21} jest oczywiście liczbą całkowitą, a więc $2^{21}+2^{23}+2^{24}$ jest wielokrotnością 25, czyli jest podzielne przez 25.

Zadanie 6

Wykaż, że liczba $3^{18} - 1$ jest podzielna przez 56.

Zadanie 6 - rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
&3^{18} - 1 = \\
=&(3^6 - 1)(3^{12} + 3^6 + 1) = \\
=&(3^2 - 1)(3^4 + 3^2 + 1)(3^{12} + 3^6 + 1) = \\
=&8 \cdot 91 \cdot (3^{12} + 3^6 + 1) = \\
=&8 \cdot 7 \cdot 13 \cdot (3^{12} + 3^6 + 1) = \\
=&56 \cdot 13 \cdot (3^{12} + 3^6 + 1)
\end{aligned}
$$

Zadanie 6 - rozwiązanie

$$\begin{aligned}
&3^{18}-1= \\
=&(3^6-1)(3^{12}+3^6+1)= \\
=&(3^2-1)(3^4+3^2+1)(3^{12}+3^6+1)= \\
=&8\cdot 91\cdot(3^{12}+3^6+1)= \\
=&8\cdot 7\cdot 13\cdot(3^{12}+3^6+1)= \\
=&56\cdot 13\cdot(3^{12}+3^6+1)
\end{aligned}$$

Znów $13\cdot(3^{12}+3^6+1)$ jest oczywiście liczbą całkowitą, a więc $3^{18}-1$ jest wielokrotnością 56, czyli jest podzielne przez 56.

Zadanie 7

Oblicz wartość wyrażenia $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{8}}}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{12}}}}\right)^{-1}$

Zadanie 7 - odpowiedź

1

Zadanie 7 - rozwiązanie

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{8}}}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{12}}}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\sqrt{\sqrt{2^{8}}} - \sqrt{\sqrt{2^{4}}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^{6}}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\sqrt{2^{4}} - \sqrt{2^{2}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{4^{2}}\right)^{-1} =$$

$$= \left(4 - 2\right) \cdot \left(2\right)^{-1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Zadanie 8

Oblicz wartość wyrażenia $\dfrac{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{10} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-3} \cdot \left(\sqrt[4]{5}\right)^{2}}$

Zadanie 8 - odpowiedź

125

Zadanie 8 - rozwiązanie

$$\frac{\left(\sqrt[4]{5}\right)^{10}\cdot\left(\sqrt[4]{5}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{5}\right)^{-3}\cdot\left(\sqrt[4]{5}\right)^{2}}=$$

$$=\frac{5^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}}{5^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{5^2}{5^{-1}}=$$

$$=5^3=125$$

Zadanie 9

Wykaż, że liczba $7^{12} - 5^6$ jest podzielna przez 44.

Zadanie 9 - rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
&7^{12} - 5^6 = \\
=&49^6 - 5^6 = \\
=&(49^3 - 5^3)(49^3 + 5^3) = \\
=&(49 - 5)(49^2 + 49 \cdot 5 + 5^2)(49^3 + 5^3) = \\
=&44 \cdot (49^2 + 49 \cdot 5 + 5^2)(49^3 + 5^3)
\end{aligned}
$$

Zadanie 9 - rozwiązanie

$$\begin{aligned}
&7^{12} - 5^6 = \\
=&49^6 - 5^6 = \\
=&(49^3 - 5^3)(49^3 + 5^3) = \\
=&(49 - 5)(49^2 + 49 \cdot 5 + 5^2)(49^3 + 5^3) = \\
=&44 \cdot (49^2 + 49 \cdot 5 + 5^2)(49^3 + 5^3)
\end{aligned}$$

$(49^2 + 49 \cdot 5 + 5^2)(49^3 + 5^3)$ jest liczbą całkowitą, a więc $7^{12} - 5^6$ jest podzielna przez 44.

Zadanie 10

Oblicz wartość wyrażenia $25^{1-\log_5 3} + 2 \cdot 7^{-\log_7 9}$

Zadanie 10 - odpowiedź

3

Zadanie 10 - rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
&25^{1-\log_5 3} + 2 \cdot 7^{-\log_7 9} = \\
=&25^1 \cdot 25^{-\log_5 3} + \frac{2}{7^{\log_7 9}} = \\
=&\frac{25}{25^{\log_5 3}} + \frac{2}{9} = \\
=&\frac{25}{5^{2\log_5 3}} + \frac{2}{9} = \\
=&\frac{25}{5^{\log_5 9}} + \frac{2}{9} = \\
=&\frac{25}{9} + \frac{2}{9} = \frac{27}{9} = 3
\end{aligned}
$$

Zadanie 11

Oblicz $\log_{\sqrt{3}} 64 \cdot \log_4 81$

Zadanie 11 - odpowiedź

24

Zadanie 11 - rozwiązanie

$$
\begin{aligned}
&\log_{\sqrt{3}} 64 \cdot \log_4 81 = \\
=&\frac{\log_3 64}{\log_3 \sqrt{3}} \cdot \frac{\log_3 81}{\log_3 4} = \\
=&\frac{\log_3 4^3}{0.5} \cdot \frac{4}{\log_3 4} = \\
=&\frac{3\log_3 4}{0.5} \cdot \frac{4}{\log_3 4} = \\
=&\frac{3}{0.5} \cdot \frac{4}{1} = 24
\end{aligned}
$$

Zadanie 12

Wiedząc, że $a = \log 2$ i $b = \log 3$, wyraź $\log_{27} 40$ przy pomocy a i b.

Zadanie 12 - odpowiedź

$\log_{27} 40 = \frac{2a+1}{3b}$.

Zadanie 12 - rozwiązanie

$$\log_{27} 40 = \frac{\log 40}{\log 27} = \frac{\log 4 + \log 10}{\log 3^3} = \frac{\log 2^2 + 1}{3\log 3} = \frac{2\log 2 + 1}{3\log 3} = \frac{2a+1}{3b}$$

Zadanie 13

Oblicz $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$.

Zadanie 13 - odpowiedź

$\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2 = 1.$

Zadanie 13 - rozwiązanie

$$\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 5} = \frac{2 \cdot \log_3 2}{\log_3 4} = 1$$

Zadanie 14

Wykaż, że liczba $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 14 - rozwiązanie

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=$$
$$=|\sqrt{5}+1|-|\sqrt{5}-1|$$
$$=\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1=2\in\mathbb{N}$$

Zadanie 15

Wykaż, że funkcja $f(x) = |x + 3|$ nie jest monotoniczna w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 15 - rozwiązanie

Weźmy $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$.

Zadanie 15 - rozwiązanie

Weźmy $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$.

$f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 3$.

Zadanie 15 - rozwiązanie

Weźmy $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$.

$f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 3$.

Mamy $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$, więc funkcja nie jest rosnąca.

Zadanie 15 - rozwiązanie

Weźmy $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$.

$f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 3$.

Mamy $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$, więc funkcja nie jest rosnąca.

Mamy też $x_2 < x_3$, ale $f(x_2) < f(x_3)$, więc funkcja nie jest malejąca.

Zadanie 15 - rozwiązanie

Weźmy $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 0$.

$f(x_1) = 2$, $f(x_2) = 1$, $f(x_3) = 3$.

Mamy $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$, więc funkcja nie jest rosnąca.

Mamy też $x_2 < x_3$, ale $f(x_2) < f(x_3)$, więc funkcja nie jest malejąca.

Funkcja nie jest ani rosnąca ani malejąca, a więc nie jest monotoniczna.

Zadanie 16

Określ monotnoniczność funkcji $f(x) = 3 - 2x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 16 - odpowiedź

Funkcja jest malejąca.

Zadanie 16 - rozwiązanie

Weźmy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 < x_2$.

Zadanie 16 - rozwiązanie

Weźmy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 < x_2$. Sprawdzamy znak $f(x_2) - f(x_1)$.

Zadanie 16 - rozwiązanie

Weźmy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 < x_2$. Sprawdzamy znak $f(x_2) - f(x_1)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = 3 - 2x_2 - (3 - 2x_1) = -2x_2 + 2x_1 = 2(x_1 - x_2) < 0$$

Zadanie 16 - rozwiązanie

Weźmy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $x_1 < x_2$. Sprawdzamy znak $f(x_2) - f(x_1)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = 3 - 2x_2 - (3 - 2x_1) = -2x_2 + 2x_1 = 2(x_1 - x_2) < 0$$

Mamy $f(x_2) - f(x_1) < 0$ czyli funkcja jest malejąca.

Zadanie 17

Zbadaj parzystość/nieparzystość funkcji $f(x) = \dfrac{|x|}{x^4 - 2}$.

Zadanie 17 - odpowiedź

Funkcja jest parzysta

Zadanie 17 - rozwiązanie

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt[4]{2}\}$. Dziedzina się zgadza - jest symetryczna względem 0.

Zadanie 17 - rozwiązanie

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt[4]{2}\}$. Dziedzina się zgadza - jest symetryczna względem 0.

Obliczamy $f(-x)$

Zadanie 17 - rozwiązanie

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt[4]{2}\}$. Dziedzina się zgadza - jest symetryczna względem 0.

Obliczamy $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 2} = \frac{|x|}{x^4 + 2} = f(x)$$

Zadanie 17 - rozwiązanie

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt[4]{2}\}$. Dziedzina się zgadza - jest symetryczna względem 0.

Obliczamy $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 2} = \frac{|x|}{x^4 + 2} = f(x)$$

Czyli mamy $f(-x) = f(x)$, a więc jest to funkcja parzysta.

Zadanie 18

Zbadaj, czy funkcja $f(x) = 3 - x^2$ jest różnowartościowa (one-to-one) dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 18 - odpowiedź

Nie

Zadanie 18

Oczywiście $1 \neq -1$, ale $f(1) = 2 = f(-1)$, czyli funkcja nie jest różnowartościowa, ponieważ dla różnych argumentów przyjmuje te same wartości.

Zadanie 19

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest różnowartościowa dla $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

Zadanie 19 - rozwiązanie

Załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$.

Zadanie 19 - rozwiązanie

Załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$.
Wtedy:

$$\frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 2}$$
$$(x_1 - 1)(x_2 + 2) = (x_2 - 1)(x_1 + 2)$$
$$x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 2 = x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Zadanie 19 - rozwiązanie

Załóżmy, że $f(x_1) = f(x_2)$.
Wtedy:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} &= \frac{x_2 - 1}{x_2 + 2} \\
(x_1 - 1)(x_2 + 2) &= (x_2 - 1)(x_1 + 2) \\
x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 2 &= x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 2 \\
3x_1 &= 3x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}
$$

Te same wartości dają te same argumenty, a więc funkcja jest różnowartościowa.

Zadanie 20

Określ dziedzinę, miejsca zerowe oraz przecięcie z osią OY funkcji $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$

Zadanie 20 - odpowiedzi

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Zadanie 20 - odpowiedzi

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Miejsca zerowe: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Zadanie 20 - odpowiedzi

Dziedzina: $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Miejsca zerowe: $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.
Przecięcie z OY: $(0, \frac{9}{4})$.

Zadanie 20 - rozwiązanie

Dziedzina: $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Zadanie 20 - rozwiązanie

Dziedzina: $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Miejsca zerowe: $x^2 - 9 = 0$, czyli $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Zadanie 20 - rozwiązanie

Dziedzina: $x^2 - 4 \neq 0$, czyli $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Miejsca zerowe: $x^2 - 9 = 0$, czyli $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.
Przecięcie z OY: Obliczamy wartości funkcji dla $x = 0$, czyli $f(0)$, co daje punkt: $(0, \frac{9}{4})$.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.