

Nierówności kwadratowe

Na wejściówkę trzeba umieć rozwiązać nierówności kwadratowe.

Przykład wprowadzający

Rozwiązywanie nierówności to w praktyce rozwiązywanie równań plus sign diagram.

Przykład wprowadzający

Rozwiąż:

$$x^2 + 4x - 12 < 0$$

Przykład wprowadzający

Rozwiąż:

$$x^2 + 4x - 12 < 0$$

Znajdujemy (dowolną metodą) rozwiązania:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Przykład wprowadzający

Rozwiąż:

$$x^2 + 4x - 12 < 0$$

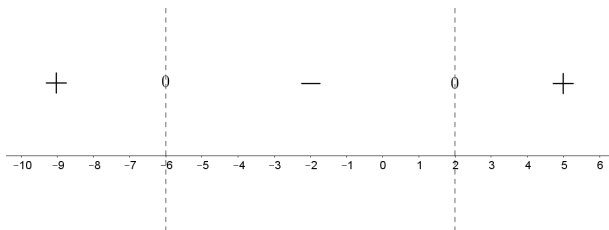
Znajdujemy (dowolną metodą) rozwiązania:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Są nimi $x_1 = -6$ oraz $x_2 = 2$

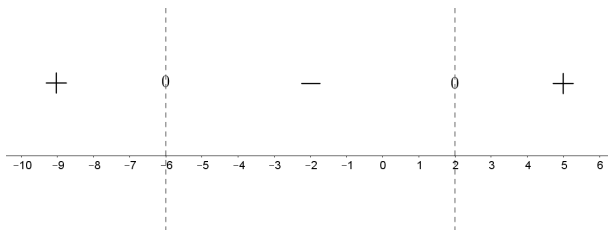
Przykład wprowadzający

Robimy sign diagram dla wyrażenia $x^2 + 4x - 12$.



Przykład wprowadzający

Robimy sign diagram dla wyrażenia $x^2 + 4x - 12$.



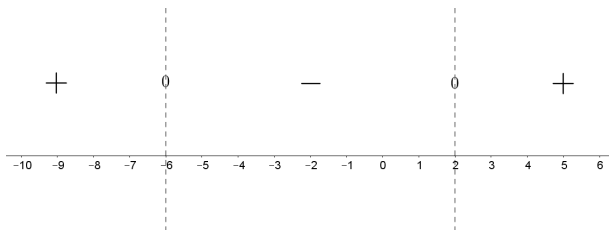
Chcemy rozwiązać:

$$x^2 + 4x - 12 < 0$$

Czyli nasze wyrażenie ma być ujemne.

Przykład wprowadzający

Robimy sign diagram dla wyrażenia $x^2 + 4x - 12$.



Chcemy rozwiązać:

$$x^2 + 4x - 12 < 0$$

Czyli nasze wyrażenie ma być ujemne. Rozwiązaniami będą $x \in (-6, 2)$.

Przykład wprowadzający

Pierwszą część rozwiązania nierówności mamy przeciwioną.

Przykład wprowadzający

Pierwszą część rozwiązania nierówności mamy przewidzianą. Jeśli chodzi o drugą część robiliśmy to już jakiś czas temu, więc przypomnijmy - wiemy, że wyrażenie jest 0 dla wartości znalezionych w pierwszej części (i tylko dla nich). Musimy teraz obliczyć znaki naszego wyrażenia pomiędzy tymi wartościami. By to zrobić wystarczy podstawić odpowiednie wartości (np. 3, 0 i -8).

Przykład wprowadzający

Pierwszą część rozwiązania nierówności mamy przeciwzoną. Jeśli chodzi o drugą część robiliśmy to już jakiś czas temu, więc przypomnijmy - wiemy, że wyrażenie jest 0 dla wartości znalezionych w pierwszej części (i tylko dla nich). Musimy teraz obliczyć znaki naszego wyrażenia pomiędzy tymi wartościami. By to zrobić wystarczy podstawić odpowiednie wartości (np. 3, 0 i -8). Później będziemy robili to szybciej (już bez podstawiania czegokolwiek).

Przykład 1

Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 + 7x - 4 \geq 0$$

Przykład 1

Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 + 7x - 4 \geq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

Przykład 1

Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 + 7x - 4 \geq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

Mamy $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Przykład 1

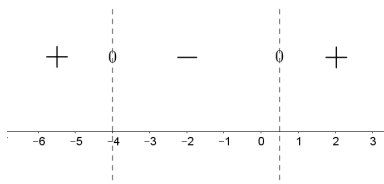
Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 + 7x - 4 \geq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

Mamy $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Robimy sign diagram:



Chcemy, by wyrażenie było nieujemne, czyli $x \in (-\infty, -4] \cup [0.5, \infty)$.

Przykład 2

Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 - 4 \leq 0$$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 - 4 \leq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x^2 - 4 = 0$$

Przykład 2

Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 - 4 \leq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x^2 - 4 = 0$$

Mamy $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$.

Przykład 2

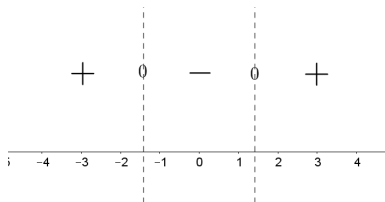
Rozwiąż nierówność:

$$2x^2 - 4 \leq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$2x^2 - 4 = 0$$

Mamy $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. Robimy sign diagram:



Chcemy, by wyrażenie było niedodatnie, czyli $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Przykład 3

Rozwiąż nierówność:

$$-x^2 + 5x + 14 < 0$$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność:

$$-x^2 + 5x + 14 < 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$-x^2 + 5x + 14 = 0$$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność:

$$-x^2 + 5x + 14 < 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$-x^2 + 5x + 14 = 0$$

Mamy $x_1 = -2$, $x_2 = 7$.

Przykład 3

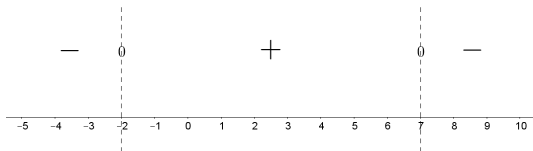
Rozwiąż nierówność:

$$-x^2 + 5x + 14 < 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$-x^2 + 5x + 14 = 0$$

Mamy $x_1 = -2$, $x_2 = 7$. Robimy sign diagram:



Chcemy, by wyrażenie było ujemne, czyli $x \in (-\infty, -2] \cup [7, \infty)$.

Przykład 3

Uwaga, zauważcie, że w przykładzie 3, sign diagram jest inny od tego z poprzednich przykładów. Jeżeli ktoś podstawiał liczby, to oczywiście wyjdzie mu dobrze. W praktyce jednak to, jaki będzie sign diagram zależy od znaku współczynnika przy x^2 . Omówimy to szczegółowo na zajęciach.

Przykład 4

Rozwiąż nierówność:

$$3x^2 - 13x - 10 \leq 0$$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność:

$$3x^2 - 13x - 10 \leq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$3x^2 - 13x - 10 = 0$$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność:

$$3x^2 - 13x - 10 \leq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$3x^2 - 13x - 10 = 0$$

Mamy $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 5$.

Przykład 4

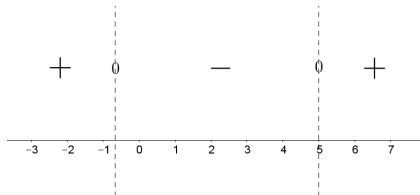
Rozwiąż nierówność:

$$3x^2 - 13x - 10 \leq 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$3x^2 - 13x - 10 = 0$$

Mamy $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 5$. Robimy sign diagram:



Chcemy, by wyrażenie było niedodatnie, czyli $x \in [-\frac{2}{3}, 5]$.

Przykład 5

Rozwiąż nierówność:

$$5x + 3 - 2x^2 > 0$$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność:

$$5x + 3 - 2x^2 > 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$5x + 3 - 2x^2 = 0$$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność:

$$5x + 3 - 2x^2 > 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$5x + 3 - 2x^2 = 0$$

Mamy $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$.

Przykład 5

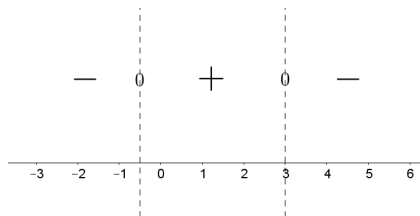
Rozwiąż nierówność:

$$5x + 3 - 2x^2 > 0$$

Rozwiązujemy równanie:

$$5x + 3 - 2x^2 = 0$$

Mamy $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$. Robimy sign diagram:



Chcemy, by wyrażenie było dodatnie, czyli $x \in (-\frac{1}{2}, 3)$.

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2.5) \cup (1, \infty).$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2.5) \cup (1, \infty).$$

$$12 - x - x^2 > 0$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2.5) \cup (1, \infty).$$

$$12 - x - x^2 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-4, 3).$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2.5) \cup (1, \infty).$$

$$12 - x - x^2 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-4, 3).$$

$$x^2 - 20 \geq 0$$

Przykłady

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty).$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in [-1, 4].$$

$$2x^2 + 3x - 5 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2.5) \cup (1, \infty).$$

$$12 - x - x^2 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-4, 3).$$

$$x^2 - 20 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-\infty, -2\sqrt{5}) \cup (2\sqrt{5}, \infty).$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \infty\right).$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \infty\right).$$

Dwa przykłady do przemyślenia (takich na wejściówce nie będzie):

$$x^2 + x + 5 > 0$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \infty\right).$$

Dwa przykłady do przemyślenia (takich na wejściówce nie będzie):

$$x^2 + x + 5 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \mathbb{R}.$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \infty\right).$$

Dwa przykłady do przemyślenia (takich na wejściówce nie będzie):

$$x^2 + x + 5 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \mathbb{R}.$$

$$x^2 - 3x + 11 \leq 0$$

Przykłady cd.

Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left[-\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

$$2x^2 + 3x - 3 \geq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{33}}{4}, \infty\right).$$

Dwa przykłady do przemyślenia (takich na wejściówce nie będzie):

$$x^2 + x + 5 > 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \mathbb{R}.$$

$$x^2 - 3x + 11 \leq 0 \quad \text{Rozwiązanie: } x \in \emptyset.$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.