Układy równań

Na wejściówkę trzeba umieć ustalić, dla jakich wartości parametru dany układ ma (1) jedno rozwiązanie (2) nieskończenie wiele rozwiązań (3) zero rozwiązań.

Przykład 1

Rozważmy następujący układ:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$$

Przykład 1

Rozważmy następujący układ:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 8 \end{cases}$$

Spróbujmy go rozwiązać poznaną metodą.

Przykład 1

Zapisujemy macierz reprezentującą ten układ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

Przykład 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Przykład 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy i odejmujemy od trzeciego pierwszy 3 razy.
2. Dzielimy drugi i trzeci wiersz przez -3.

Przykład 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy i odejmujemy od trzeciego pierwszy 3 razy.
2. Dzielimy drugi i trzeci wiersz przez -3.
   Kolejny krok:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3. Odejmujemy od trzeciego wiersza drugi.

Przykład 1

Otrzymaliśmy macierz, która reprezentuje następujący układ:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ y = \frac{4}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Przykład 1

Otrzymaliśmy macierz, która reprezentuje następujący układ:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ y = \frac{4}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Widzimy, że $y = \frac{4}{3}$, ale x i z mogą przyjmować nieskończenie wiele wartości. Wniosek: układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 2

Rozważmy kolejny układ:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 5 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

Przykład 2

Rozważmy kolejny układ:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 5 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 5y + 4z = 2 \end{cases}$$

Znów rozwiążemy go przy pomocy macierzy.

Przykład 2

Zapisujemy macierz reprezentującą ten układ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Przykład 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & 7 & -9 \\ 0 & -9 & 7 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Przykład 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & 7 & -9 \\ 0 & -9 & 7 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy raz.
2. Dzielimy drugi i trzeci wiersz przez -9.

Przykład 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & 7 & -9 \\ 0 & -9 & 7 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy raz.
2. Dzielimy drugi i trzeci wiersz przez -9.
   Kolejny krok:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

3. Odejmujemy od trzeciego wiersza drugi.

Przykład 2

Otrzymaliśmy macierz, która reprezentuje następujący układ:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 5 \\ y - \frac{7}{9}z = 1 \\ 0 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Przykład 2

Otrzymaliśmy macierz, która reprezentuje następujący układ:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 5 \\ y - \frac{7}{9}z = 1 \\ 0 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Widzimy, że z powodu trzeciego równania jest to układ sprzeczny. Nie ma rozwiązań.

Teoria

Gdy rozwiązujemy układ 3 równań z 3 niewiadomymi metodą macierzy możemy dojść do następujących sytuacji:

Teoria

Gdy rozwiązujemy układ 3 równań z 3 niewiadomymi metodą macierzy możemy dojść do następujących sytuacji:

1. Otrzymaliśmy macierz: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \end{array}\right)$. W takim przypadku układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
2. Otrzymaliśmy macierz: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. W takim przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Teoria

Gdy rozwiązujemy układ 3 równań z 3 niewiadomymi metodą macierzy możemy dojść do następujących sytuacji:

1. Otrzymaliśmy macierz: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{array}\right)$. W takim przypadku układ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
2. Otrzymaliśmy macierz: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. W takim przypadku układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
3. Otrzymaliśmy macierz: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right)$. Gdzie $m \neq 0$. W takim przypadku układ jest sprzeczny - nie ma rozwiązań.

Teoria

W praktyce, gdy rozwiązujemy równanie z parametrem i dochodzimy do postaci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & k & \dots \end{array}\right)$$

i wiemy, że $k \neq 0$, to możemy od razu wywnioskować, że będzie dokładnie jedno rozwiązania.

Teoria

W praktyce, gdy rozwiązujemy równanie z parametrem i dochodzimy do postaci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & k & \dots \end{array}\right)$$

i wiemy, że $k \neq 0$, to możemy od razu wywnioskować, że będzie dokładnie jedno rozwiązania. Dlaczego?

Teoria

W praktyce, gdy rozwiązujemy równanie z parametrem i dochodzimy do postaci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & ... \\ 0 & 0 & k & ... \end{array}\right)$$

i wiemy, że $k \neq 0$, to możemy od razu wywnioskować, że będzie dokładnie jedno rozwiązania. Dlaczego? Gdyż kolejnym krokiem byłoby podzielenie trzeciego wiersza przez k (a możemy to zrobić, bo $k \neq 0$) i doszlibyśmy do

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \end{array}\right)$$

Teoria

W praktyce, gdy rozwiązujemy równanie z parametrem i dochodzimy do postaci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & k & \dots \end{array}\right)$$

i wiemy, że $k \neq 0$, to możemy od razu wywnioskować, że będzie dokładnie jedno rozwiązania. Dlaczego? Gdyż kolejnym krokiem byłoby podzielenie trzeciego wiersza przez k (a możemy to zrobić, bo $k \neq 0$) i doszlibyśmy do

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \end{array}\right)$$

Jeśli więc zależy nam tylko na określeniu liczby rozwiązań można już ten ostatni krok pominąć.

Przykład 3

Określ dla jakich wartości parametru a układ:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 13 \\ x + 8y + 9z = a \end{cases}$$

(i) ma dokładnie jedno rozwiązanie, (ii) ma nieskończenie wiele rozwiązań, (iii) nie ma rozwiązań.

Przykład 3

Zapisujemy macierz reprezentującą ten układ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 8 & 9 & a \end{array}\right)$$

Przykład 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 8 & 9 & a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 10 & a+1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a+1}{10} \end{array}\right)$$

Przykład 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 8 & 9 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 10 & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a+1}{10} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy raz.
2. Dzielimy drugi wiersz przez 5, a trzeci wiersz przez 10.

Przykład 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ 1 & 8 & 9 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 10 & a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a+1}{10} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy raz.
2. Dzielimy drugi wiersz przez 5, a trzeci wiersz przez 10.
   Kolejny krok:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a+1}{10} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a+1}{10} - 3 \end{array}\right)$$

3. Odejmujemy od trzeciego wiersza drugi.

Przykład 3

Widzimy już, że nasza macierz w ostatnim rzędzie ma trzy 0, a więc na pewno nie będzie jednego rozwiązania.

Przykład 3

Widzimy już, że nasza macierz w ostatnim rzędzie ma trzy 0, a więc na pewno nie będzie jednego rozwiązania.

1. Jeśli $\frac{a+1}{10} - 3 = 0$, czyli $a = 29$, to cały ostatni wiersz to są 0, a więc będzie nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 3

Widzimy już, że nasza macierz w ostatnim rzędzie ma trzy 0, a więc na pewno nie będzie jednego rozwiązania.

1. Jeśli $\frac{a+1}{10} - 3 = 0$, czyli $a = 29$, to cały ostatni wiersz to są 0, a więc będzie nieskończenie wiele rozwiązań.
2. Jeśli natomiast $\frac{a+1}{10} - 3 \neq 0$, czyli $a \in \mathbb{R} - \{3\}$, to otrzymamy sprzeczność, a więc nie będzie rozwiązań.

Przykład 4

Określ dla jakich wartości parametru a układ:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = a - 1 \\ 2x - y + z = 7 \\ 3x - 5y + az = 16 \end{cases}$$

(i) ma dokładnie jedno rozwiązanie, (ii) ma nieskończenie wiele rozwiązań, (iii) nie ma rozwiązań.

Przykład 4

Zapisujemy macierz reprezentującą ten układ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & a & 16 \end{array}\right)$$

Przykład 4

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy trzy razy.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & a & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 0 & -7 & -5 & 9-2a \\ 0 & -14 & a-9 & 19-3a \end{array}\right)$$

2. Dzielimy drugi wiersz przez -7, a trzeci wiersz przez -14.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 0 & -7 & -5 & 9-2a \\ 0 & -14 & a-9 & 19-3a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2a-9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9-a}{14} & \frac{3a-19}{14} \end{array}\right)$$

3. Odejmujemy od trzeciego wiersza drugi.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2a-9}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9-a}{14} & \frac{3a-19}{14} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2a-9}{7} \\ 0 & 0 & \frac{-1-a}{14} & \frac{-a-1}{14} \end{array}\right)$$

Przykład 4

1. Jeśli $\frac{-a-1}{14} \neq 0$, czyli $a \neq -1$, to w ostatnim rzędzie przed kreską nie otrzymamy 0, a więc będzie jedno rozwiązanie.

Przykład 4

1. Jeśli $\frac{-a-1}{14} \neq 0$, czyli $a \neq -1$, to w ostatnim rzędzie przed kreską nie otrzymamy 0, a więc będzie jedno rozwiązanie.
2. Jeśli natomiast $\frac{-a-1}{14} = 0$, czyli $a = -1$, to otrzymamy cały rząd 0, gdyż ostatnia komórka również się zeruje, a więc będzie nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 5

Określ dla jakich wartości parametrów a i b układ:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 7 \\ 2x - y + az = 4 \\ 2x + 2y + z = b \end{cases}$$

(i) ma dokładnie jedno rozwiązanie, (ii) ma nieskończenie wiele rozwiązań, (iii) nie ma rozwiązań.

Przykład 5

Zapisujemy macierz reprezentującą ten układ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ 2 & 2 & 1 & b \end{array}\right)$$

Przykład 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ 2 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & a-2 & -10 \\ 0 & -6 & -1 & b-14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{14-b}{6} \end{array}\right)$$

Przykład 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ 2 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & a-2 & -10 \\ 0 & -6 & -1 & b-14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{14-b}{6} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy dwa razy.
2. Dzielimy drugi wiersz przez -7, a trzeci wiersz przez -6.

Przykład 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ 2 & 2 & 1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -7 & a-2 & -10 \\ 0 & -6 & -1 & b-14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{14-b}{6} \end{array}\right)$$

Kroki:

1. Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy dwa razy i odejmujemy od trzeciego pierwszy dwa razy.
2. Dzielimy drugi wiersz przez -7, a trzeci wiersz przez -6.
   Kolejny krok:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{14-b}{6} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} - \frac{2-a}{7} & \frac{14-b}{6} - \frac{10}{7} \end{array}\right)$$

3. Odejmujemy od trzeciego wiersza drugi.

Przykład 5

Po odjęciu ułamków nasza macierz wygląda następująco:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6a-5}{42} & \frac{68-7b}{42} \end{array}\right)$$

Przykład 5

Po odjęciu ułamków nasza macierz wygląda następująco:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6a-5}{42} & \frac{68-7b}{42} \end{array}\right)$$

1. Jeśli $a \neq \frac{5}{6}$ to w prawym dolnym rogu przed kreską będziemy mieli liczbę różną od 0, a więc otrzymamy dokładnie jedno rozwiązanie.

Przykład 5

Po odjęciu ułamków nasza macierz wygląda następująco:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6a-5}{42} & \frac{68-7b}{42} \end{array}\right)$$

1. Jeśli $a \neq \frac{5}{6}$ to w prawym dolnym rogu przed kreską będziemy mieli liczbę różną od 0, a więc otrzymamy dokładnie jedno rozwiązanie.
2. Jeśli $a = \frac{5}{6}$ to mamy 0, jeśli ponadto $b = \frac{68}{7}$ to cały ostatni wiersz to 0, a więc mamy nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 5

Po odjęciu ułamków nasza macierz wygląda następująco:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{2-a}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & \frac{6a-5}{42} & \frac{68-7b}{42} \end{array}\right)$$

1. Jeśli $a \neq \frac{5}{6}$ to w prawym dolnym rogu przed kreską będziemy mieli liczbę różną od 0, a więc otrzymamy dokładnie jedno rozwiązanie.
2. Jeśli $a = \frac{5}{6}$ to mamy 0, jeśli ponadto $b = \frac{68}{7}$ to cały ostatni wiersz to 0, a więc mamy nieskończenie wiele rozwiązań.
3. Jeśli $a = \frac{5}{6}$, ale $b \neq \frac{68}{7}$ to cały ostatni wiersz poza ostatnią komórką to 0, co daje nam równanie sprzeczne, a więc brak rozwiązań.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.