Najmniejsza i największa wartość funkcji

Musimy umieć określić najmniejszą i największą wartość podanej funkcji.

Wprowadzenie

Określenie najmniejszej/największej wartości danej funkcji na podstawie jej wykresu jest stosunkowo proste. Na prezentacji zajmiemy się określaniem najmniejszej/najwięszkej wartości funkcji zadanej wzorem.

Przykład 1

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 3x + 2$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Przykład 1

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 3x + 2$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$. Skoro $x \in \langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$\begin{aligned} &2 \leqslant x \leqslant 5 && \backslash \times 3 \\ &6 \leqslant 3x \leqslant 15 && \backslash + 2 \\ &8 \leqslant 3x + 2 \leqslant 17 \end{aligned}$$

Przykład 1

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 3x + 2$ dla $x \in \langle 2, 5\rangle$. Skoro $x \in \langle 2, 5\rangle$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
&2 \leqslant x \leqslant 5 && \backslash \times 3\\
&6 \leqslant 3x \leqslant 15 && \backslash + 2\\
&8 \leqslant 3x + 2 \leqslant 17
\end{aligned}
$$

Czyli otrzymaliśmy, że $f(x) = 3x + 2 \in \langle 8, 17\rangle$. Zatem zbiór wartości $f(x)$ to $\langle 8, 17\rangle$, najmniejszą wartością jest 8, największą 17.

Przykład 2

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 5 - 2x$ dla $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

Przykład 2

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 5 - 2x$ dla $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

Skoro $x \in \langle 1, 4 \rangle$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
&1 \leqslant x \leqslant 4 \\
&2 \leqslant 2x \leqslant 8 \\
&-8 \leqslant -2x \leqslant -2 \\
&-3 \leqslant -2x + 5 \leqslant 3
\end{aligned}
$$

Przykład 2

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 5 - 2x$ dla $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

Skoro $x \in \langle 1, 4 \rangle$, to mamy:

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 \leqslant 2x \leqslant 8 \\ -8 \leqslant -2x \leqslant -2 \\ -3 \leqslant -2x + 5 \leqslant 3 \end{aligned}$$

Czyli otrzymaliśmy, że $f(x) = 3x + 2 \in \langle 8, 17 \rangle$. Zatem zbiór wartości $f(x)$ to $\langle 8, 17 \rangle$, najmniejszą wartością jest 8, największą 17.

Przykład 2

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 5 - 2x$ dla $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

Skoro $x \in \langle 1, 4 \rangle$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
1 &\leqslant x \leqslant 4 \\
2 &\leqslant 2x \leqslant 8 \\
-8 &\leqslant -2x \leqslant -2 \\
-3 &\leqslant -2x + 5 \leqslant 3
\end{aligned}
$$

Czyli otrzymaliśmy, że $f(x) = 3x + 2 \in \langle 8, 17 \rangle$. Zatem zbiór wartości $f(x)$ to $\langle 8, 17 \rangle$, najmniejszą wartością jest 8, największą 17.

Ważny jest 2. krok. Pomnożyliśmy obie strony przez -1, a więc odwracamy nierówności!

Przykład 3

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$ dla $x \in \langle -4, 8 \rangle$.

Przykład 3

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$ dla $x \in \langle -4, 8 \rangle$.

Skoro $x \in \langle -4, 8 \rangle$, to mamy:

$$-4 \leqslant x \leqslant 8$$
$$-2 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 4$$
$$-4 \leqslant -\frac{x}{2} \leqslant 2$$
$$-1 \leqslant 3 - \frac{x}{2} \leqslant 5$$

Przykład 3

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$ dla $x \in \langle -4, 8 \rangle$.

Skoro $x \in \langle -4, 8 \rangle$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
-4 &\leqslant x \leqslant 8 \\
-2 &\leqslant \frac{x}{2} \leqslant 4 \\
-4 &\leqslant -\frac{x}{2} \leqslant 2 \\
-1 &\leqslant 3 - \frac{x}{2} \leqslant 5
\end{aligned}
$$

Czyli otrzymaliśmy, że $f(x) = 3 - \frac{x}{2} \in \langle -1, 5 \rangle$. Zatem zbiór wartości $f(x)$ to $\langle -1, 5 \rangle$, najmniejszą wartością jest -1, największą 5.

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Skoro $x \in \langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$
$$4 \leqslant 2x \leqslant 10$$
$$1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 7$$

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Skoro $x \in \langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$
$$4 \leqslant 2x \leqslant 10$$
$$1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 7$$

Najmniejszą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 1, a więc największą wartością funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ będzie $\frac{8}{1} = 8$.

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Skoro $x \in \langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$
$$4 \leqslant 2x \leqslant 10$$
$$1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 7$$

Najmniejszą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 1, a więc największą wartością funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ będzie $\frac{8}{1} = 8$. Największą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 7, a więc najmniejszą wartością funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ będzie $\frac{8}{7}$.

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Skoro $x\langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$
$$4 \leqslant 2x \leqslant 10$$
$$1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 7$$

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Skoro $x\langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$
$$4 \leqslant 2x \leqslant 10$$
$$1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 7$$

Najmniejszą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 1, a więc największą wartością funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ będzie $\frac{8}{1} = 8$.

Przykład 4

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ dla $x \in \langle 2, 5 \rangle$.

Skoro $x\langle 2, 5 \rangle$, to mamy:

$$2 \leqslant x \leqslant 5$$
$$4 \leqslant 2x \leqslant 10$$
$$1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 7$$

Najmniejszą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 1, a więc największą wartością funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ będzie $\frac{8}{1} = 8$. Największą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 7, a więc najmniejszą wartością funkcji $f(x) = \frac{8}{2x-3}$ będzie $\frac{8}{7}$.

Przykład 5

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ dla $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

Przykład 5

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ dla $x \in \langle 1, 3\rangle$.

Skoro $x\langle 1, 3\rangle$, to mamy:

$$1 \leqslant x \leqslant 3$$
$$-3 \leqslant -x \leqslant -1$$
$$1 \leqslant 4 - x \leqslant 3$$

Przykład 5

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ dla $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

Skoro $x\langle 1, 3 \rangle$, to mamy:

$$1 \leqslant x \leqslant 3$$
$$-3 \leqslant -x \leqslant -1$$
$$1 \leqslant 4 - x \leqslant 3$$

Najmniejszą wartością wyrażenia $4 - x$ w zadanym przedziale jest 1, a więc największą wartością funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ będzie $\frac{5}{1} = 5$.

Przykład 5

Określ najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ dla $x \in \langle 1, 3 \rangle$.

Skoro $x\langle 1, 3 \rangle$, to mamy:

$$1 \leqslant x \leqslant 3$$
$$-3 \leqslant -x \leqslant -1$$
$$1 \leqslant 4 - x \leqslant 3$$

Najmniejszą wartością wyrażenia $4 - x$ w zadanym przedziale jest 1, a więc największą wartością funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ będzie $\frac{5}{1} = 5$. Największą wartością wyrażenia $2x - 3$ w zadanym przedziale jest 3, a więc najmniejszą wartością funkcji $f(x) = \frac{5}{4-x}$ będzie $\frac{5}{3}$.

Przykład 6

Wykaż, że dla $x > 0$ funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 2, 9 \rangle$.

Przykład 6

Wykaż, że dla $x > 0$ funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 2, 9 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

Przykład 6

Wykaż, że dla $x > 0$ funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 2, 9 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$$

Przykład 6

Wykaż, że dla $x > 0$ funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 2, 9 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$$

Czyli funkcja jest rosnąca dla $x > 0$.

Przykład 6

Wykaż, że dla $x > 0$ funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 2, 9 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$$

Czyli funkcja jest rosnąca dla $x > 0$.

Skoro funkcja jest rosnąca dla dodatnich x, to im większy argument, tym większa wartość. W związku z tym najmniejsza wartość funkcji będzie dla argumentu 2 i wyniesie $f(2) = 2^2 = 4$, a największa dla argumentu 9 i wyniesie $f(9) = 9^2 = 81$.

Przykład 7

Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 1, 16 \rangle$.

Przykład 7

Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 1, 16 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

Przykład 7

Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 1, 16 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1 = \frac{(\sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1)(\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1)}{\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1} =$$
$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1} > 0$$

Przykład 7

Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 1, 16 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1 = \frac{(\sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1)(\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1)}{\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1} = \\ = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1} > 0$$

Czyli funkcja jest rosnąca.

Przykład 7

Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest rosnąca i wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $x \in \langle 1, 16 \rangle$.

Załóżmy, że $x_2 > x_1 > 0$. Ustalamy znak $f(x_2) - f(x_1)$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1 = \frac{(\sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1)(\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1)}{\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1} =$$
$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1} > 0$$

Czyli funkcja jest rosnąca.

Skoro funkcja jest rosnąca, to im większy argument, tym większa wartość. W związku z tym najmniejsza wartość funkcji będzie dla argumentu 1 i wyniesie $f(1) = \sqrt{1} = 1$, a największa dla argumentu 16 i wyniesie $f(16) = \sqrt{16} = 4$.

Na wejściówce będą przykłady podobne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.