Funkcje okresowe

Musimy umieć analizować wykresy funkcji okresowych.

Definicja

Funkcja f jest funkcją okresową, jeśli istnieje liczba $T \neq 0$, tak, że dla każdego elementu x z dziedziny funkcji f, liczba $x + T$ również należy do dziedziny oraz $f(x + T) = f(x)$

Wprowadzenie

Obserwacja: jeśli T jest okresem funkcji f, to kT, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$ również jest okresem funkcji f.

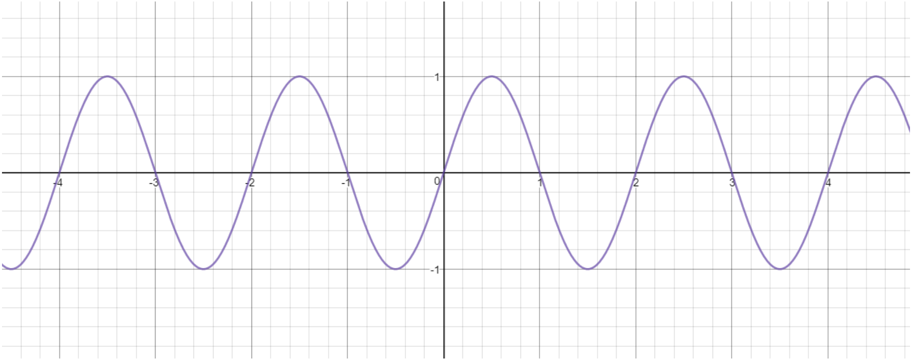
Wprowadzenie

Obserwacja: jeśli T jest okresem funkcji f, to kT, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$ również jest okresem funkcji f.

Jeśli istnieje najmniejszy dodatni okres funkcji f, to nazywamy go okresem podstawowym.

Przykład 1

Przykład wykresu funkcji okresowej:



Odczytamy różne własności przedstawionej funkcji $f(x)$ z wykresu.

Przykład 1

- Dziedzina:

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości:

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe:

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$
- Parzystość: funkcja jest nieparzysta (symetryczna względem środka układu)

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$
- Parzystość: funkcja jest nieparzysta (symetryczna względem środka układu)
- Okres podstawowy: $T = 2$

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$
- Parzystość: funkcja jest nieparzysta (symetryczna względem środka układu)
- Okres podstawowy: $T = 2$
- Przedziały monotoniczności:

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$
- Parzystość: funkcja jest nieparzysta (symetryczna względem środka układu)
- Okres podstawowy: $T = 2$
- Przedziały monotoniczności:
  rosnąca dla $x \in \langle -\frac{1}{2} + 2k, \frac{1}{2} + 2k \rangle, k \in \mathbb{Z}$,
  malejąca dla $x \in \langle \frac{1}{2} + 2k, \frac{3}{2} + 2k \rangle, k \in \mathbb{Z}$,

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$
- Parzystość: funkcja jest nieparzysta (symetryczna względem środka układu)
- Okres podstawowy: $T = 2$
- Przedziały monotoniczności:
  rosnąca dla $x \in \langle -\frac{1}{2} + 2k, \frac{1}{2} + 2k \rangle, k \in \mathbb{Z}$,
  malejąca dla $x \in \langle \frac{1}{2} + 2k, \frac{3}{2} + 2k \rangle, k \in \mathbb{Z}$,

Co oznacza ten ostatni zapis?

Przykład 1

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$
- Zbiór wartości: $y \in \langle -1, 1 \rangle$
- Miejsca zerowe: $x_0 \in \mathbb{Z}$
- Parzystość: funkcja jest nieparzysta (symetryczna względem środka układu)
- Okres podstawowy: $T = 2$
- Przedziały monotoniczności:
  rosnąca dla $x \in \langle -\frac{1}{2} + 2k, \frac{1}{2} + 2k \rangle, k \in \mathbb{Z}$,
  malejąca dla $x \in \langle \frac{1}{2} + 2k, \frac{3}{2} + 2k \rangle, k \in \mathbb{Z}$,

Co oznacza ten ostatni zapis? Nasza funkcja jest oczywiście rosnąca/malejąca w nieskończenie wielu przedziałach. Najlepiej jednak skupić się na części naszej funkcji dla $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$. Ta część funkcji powatarza się. Wystarczy więc ustalić przedziały monotoniczności w tej części i pamiętać, że okres podstawowy to 2, więc możemy dodawać do granic przedziałów wielokrotności 2.

Przykład 1

Rozwiążmy równanie:

$$f(x) = 1$$

Przykład 1

Rozwiążmy równanie:

$$f(x) = 1$$

Chcemy znaleźć argumenty, dla których wartość funkcji wynosi 1. Takich argumentów jest nieskończenie wiele. Skupmy się jednak na jednej powtarzającej się części wykresu. Jednym argumentem, dla którego wartość funkcji jest 1 jest liczna $\frac{1}{2}$. Pozostałe rozwiązania powstają po dodaniu wielokrotności okresu.

Przykład 1

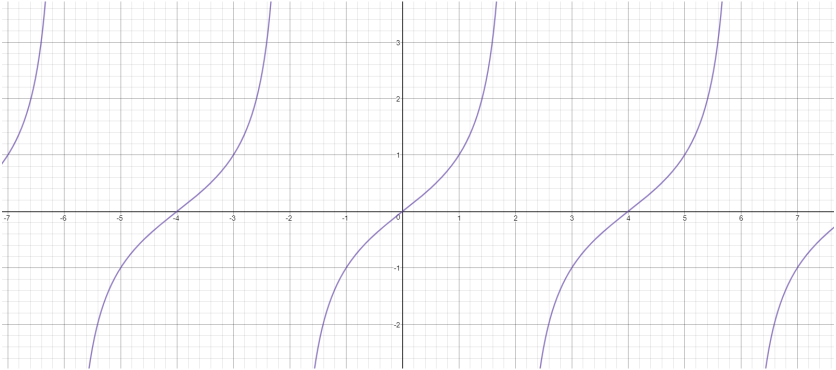
Rozwiążmy równanie:

$$f(x) = 1$$

Chcemy znaleźć argumenty, dla których wartość funkcji wynosi 1. Takich argumentów jest nieskończenie wiele. Skupmy się jednak na jednej powtarzającej się części wykresu. Jednym argumentem, dla którego wartość funkcji jest 1 jest liczna $\frac{1}{2}$. Pozostałe rozwiązania powstają po dodaniu wielokrotności okresu. W związku z tym rozwiązaniami będą $x = \frac{1}{2} + 2k$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozważmy następującą funkcję:



Znajdźmy jej okres podstawowy, miejsca zerowe i rozwiążmy $f(x) = 1$. Określmy też parzystość.

Przykład 2

Okres podstawowy to oczywiście 4.

Przykład 2

Okres podstawowy to oczywiście 4.
Miejsca zerowe to $x_0 = 4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

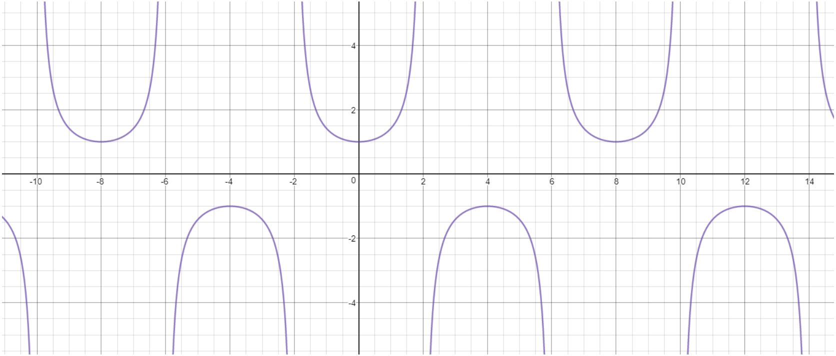
Przykład 2

Okres podstawowy to oczywiście 4.
Miejsca zerowe to $x_0 = 4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Rozwiązania równania $f(x) = 1$, to $x = 1 + 4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Okres podstawowy to oczywiście 4.
Miejsca zerowe to $x_0 = 4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Rozwiązania równania $f(x) = 1$, to $x = 1 + 4k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Parzystość: funkcja jest nieparzysta.

Rozważmy następującą funkcję:



Znajdźmy jej okres podstawowy, miejsca zerowe i określmy parzystość.

Przykład 3

Okres podstawowy to 8.

Przykład 3

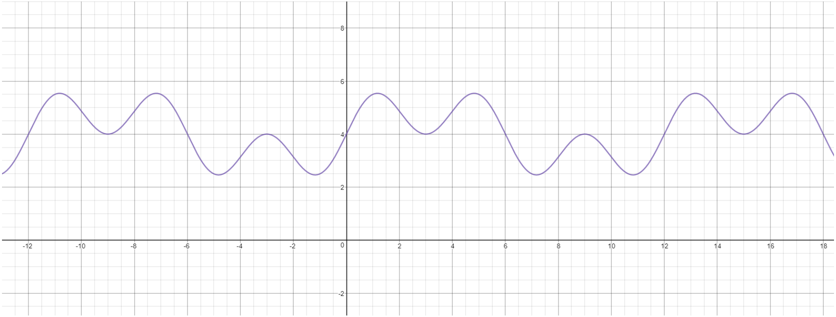
Okres podstawowy to 8.
Funkcja nie ma miejsc zerowych.

Przykład 3

Okres podstawowy to 8.
Funkcja nie ma miejsc zerowych.
Funkcja jest parzysta.

Przykład 4

Rozważmy następującą funkcję:



Znajdźmy jej okres podstawowy, miejsca zerowe i rozwiążmy $f(x) = 4$.

Przykład 4

Okres podstawowy to 12.

Przykład 4

Okres podstawowy to 12.
Nie ma miejsc zerowych.

Przykład 4

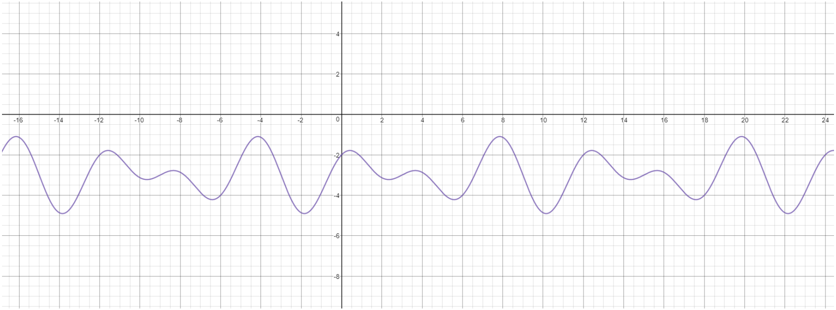
Okres podstawowy to 12.
Nie ma miejsc zerowych.
Rozwiązania równania $f(x) = 4$, to $x = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Okres podstawowy to 12.
Nie ma miejsc zerowych.
Rozwiązania równania $f(x) = 4$, to $x = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Parzystość: funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta.

Przykład 5

Rozważmy następującą funkcję:



Znajdźmy jej okres podstawowy, miejsca zerowe i określmy parzystość.

Przykład 5

Okres podstawowy to 12.

Przykład 5

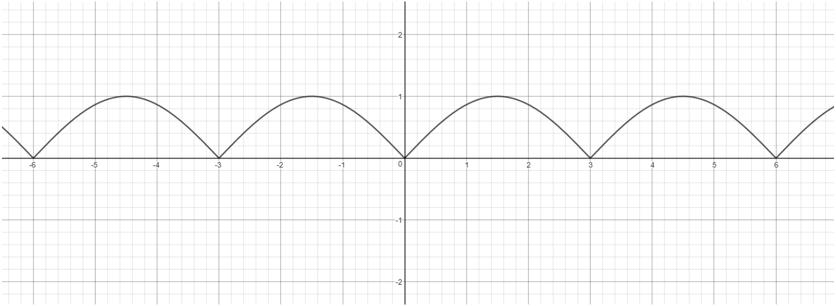
Okres podstawowy to 12.
Nie ma miejsc zerowych.

Przykład 5

Okres podstawowy to 12.
Nie ma miejsc zerowych.
Parzystość: funkcja nie jest ani parzysta ani nieparzysta.

Przykład 6

Rozważmy następującą funkcję:



Znajdźmy jej okres podstawowy, miejsca zerowe, określmy zbiór wartości i parzystość.

Przykład 6

Okres podstawowy to 3.

Przykład 6

Okres podstawowy to 3.
Miejsca zerowe $x_0 = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 6

Okres podstawowy to 3.
Miejsca zerowe $x_0 = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Zbiór wartości: $y \in \langle 0, 1 \rangle$

Przykład 6

Okres podstawowy to 3.
Miejsca zerowe $x_0 = 3k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Zbiór wartości: $y \in \langle 0, 1 \rangle$
Parzystość: funkcja jest parzysta.

Na wejściówce będzie przykład funkcji okresowej i trzeba będzie odczytać różne własności tego wykresu.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.