Wzory Viete'a

Na wejściówkę trzeba umieć zastosować wzory Viete'a, by obliczyć wartości danych wyrażeń.

Wprowadzenie

Dla danego równania kwadratowego:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mamy rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wprowadzenie

Dla danego równania kwadratowego:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mamy rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obliczmy sumę i iloczyn tych rozwiązań.

Wprowadzenie

Suma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Wprowadzenie

Suma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Iloczyn:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Wprowadzenie

Suma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Iloczyn:

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Jeśli wyprowadzenie tych wzorów jest niejasne (bo niektóre kroki zostały zrobione domyślnie), to proszę samodzielnie dodać/pomnożyć te wyrażenia. W pierwszym przypadku mamy wspólny mianownik, więc możemy dodać i $\sqrt{b^2-4ac}$ się skraca. W drugim przypadku w liczniku występuje wzór na różnicę kwadratów.

Wzory Viete'a

Mamy więc dwa ważne wzory dla równań kwadratowych:

Wzory Viete'a

Mamy więc dwa ważne wzory dla równań kwadratowych:

Wzory Viete'a

Jeśli x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $ax^2 + bx + c = 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn rozwiązań równania:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Przykład 1

Oblicz sumę i iloczyn rozwiązań równania:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4$$
$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 3$$

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta$

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = 6$

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = 6$

ii. $\alpha \times \beta$

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = 6$

ii. $\alpha \times \beta = -2$

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = 6$
ii. $\alpha \times \beta = -2$
iii. $\alpha^2 + \beta^2$

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = 6$

ii. $\alpha \times \beta = -2$

iii. $\alpha^2 + \beta^2$ tutaj musimy pokombinować. Będziemy chcieli zapisać to wyrażenie za pomocą sumy i iloczynu α i β.

Przykład 2

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = 6$

ii. $\alpha \times \beta = -2$

iii. $\alpha^2 + \beta^2$ tutaj musimy pokombinować. Będziemy chcieli zapisać to wyrażenie za pomocą sumy i iloczynu α i β.

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (6)^2 - 2(-2) = 36 + 4 = 40$$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = -5$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = -5$

ii. $\alpha \times \beta$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = -5$

ii. $\alpha \times \beta = -4$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = -5$
ii. $\alpha \times \beta = -4$
iii. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = -5$

ii. $\alpha \times \beta = -4$

iii. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ znów trzeba pokombinować. Chcemy zapisać to wyrażenie za pomocą sumy i iloczynu α i β.

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

oblicz:

i. $\alpha + \beta = -5$

ii. $\alpha \times \beta = -4$

iii. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ znów trzeba pokombinować. Chcemy zapisać to wyrażenie za pomocą sumy i iloczynu α i β.

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{(-5)^2 - 2(-4)}{-4} = \frac{25 + 8}{-4} = -\frac{33}{4}$$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 3x - 11 = 0$$

oblicz $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ oraz $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 3x - 11 = 0$$

oblicz $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ oraz $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

Zaczniemy od zauważenia, że $\alpha + \beta = 3$, natomiast $\alpha\beta = -11$. Będziemy chcieli wykorzystać te dwie informacje.

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 3x - 11 = 0$$

oblicz $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ oraz $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

Zaczniemy od zauważenia, że $\alpha + \beta = 3$, natomiast $\alpha\beta = -11$. Będziemy chcieli wykorzystać te dwie informacje.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{3}{-11} = -\frac{3}{11}$$

Przykład 3

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 3x - 11 = 0$$

oblicz $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ oraz $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

Zaczniemy od zauważenia, że $\alpha + \beta = 3$, natomiast $\alpha\beta = -11$. Będziemy chcieli wykorzystać te dwie informacje.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{3}{-11} = -\frac{3}{11}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{3^2 - 2(-11)}{(-11)^2} = \frac{31}{121}$$

Ogólna strategia

Ogólna strategia tego typu zadań jest dosyć prosta. Obliczamy ze wzorów Viete'a sumę oraz iloczyn rozwiązań i staramy się zapisać szukane wyrażenie właśnie przy pomocy sumy i iloczynu.

Trudniejszy przykład

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

oblicz $\alpha^3 + \beta^3$.

Trudniejszy przykład

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

oblicz $\alpha^3 + \beta^3$.

Wiemy, że $\alpha + \beta = 5$, natomiast $\alpha\beta = 1$. Chcemy wyrazić $\alpha^3 + \beta^3$ przy pomocy sumy i iloczynu α i β.

Trudniejszy przykład

Jeśli α i β są rozwiązaniami równania:

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

oblicz $\alpha^3 + \beta^3$.

Wiemy, że $\alpha + \beta = 5$, natomiast $\alpha\beta = 1$. Chcemy wyrazić $\alpha^3 + \beta^3$ przy pomocy sumy i iloczynu α i β.

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \\ =125 - 3 \times 1 \times 5 = 125 - 15 = 110\end{aligned}$$

Na wejściówce będzie trzeba zastosować wzory Viete'a by obliczyć sumę i iloczyn rozwiązań i wykorzystać to do obliczenia wartości podanego wyrażenia.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.