Wektory

Musimy umieć:

- mając dwa punkty A i B, wyznaczyć wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$,
- mając dany punkt A i wektor $\vec{v}$, wyznaczyć punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ lub $\overrightarrow{BA} = \vec{v}$,
- mając dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ z parametrem, wyznaczyć parametr tak, by podane wektory były równe, przeciwne, równoległe,
- obliczyć długość danego wektora.

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ to instrukcja: idź o jeden w prawo (zwiększ współrzędną x o 1) i idź o dwa do góry (zwiększ współrzędną y o 2).

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ to instrukcja: idź o jeden w prawo (zwiększ współrzędną x o 1) i idź o dwa do góry (zwiększ współrzędną y o 2).

Wektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ to instrukcja: idź o trzy w prawo (zwiększ współrzędną x o 3) i idź o jeden w dół (zmniejsz współrzędną y o 1).

Wektory

Ten sposób myślenia od razu sugeruje, że wektor taki, jak $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nie ma jednego określonego miejsca w układzie współrzędnych.

Wektory

Ten sposób myślenia od razu sugeruje, że wektor taki, jak $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nie ma jednego określonego miejsca w układzie współrzędnych.

Jeśli przyłożymy ten wektor do środka układu współrzędnych, to będzie on wskazywał punkt $(1, 2)$, ale jeśli przyłożymy go do punktu $(3, 5)$, to wskaże punkt $(4, 7)$.

Wektory

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego z nich do drugiego. Dla punktów A i B, wektor $\overrightarrow{AB}$ to będzie wektor prowadzący z punktu A do punktu B. Natomiast wektor $\overrightarrow{BA}$ to wektor prowadzący z punktu B do punktu A.

Wektory

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego z nich do drugiego. Dla punktów A i B, wektor $\overrightarrow{AB}$ to będzie wektor prowadzący z punktu A do punktu B. Natomiast wektor $\overrightarrow{BA}$ to wektor prowadzący z punktu B do punktu A.

Dla danych punktów $A(x_A, y_A)$ oraz $B(x_B, y_B)$, mamy następujące wektory:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

By dojść z punktu B do punktu A musimy iść o 4 jednostki w prawo (zwiększyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę w dół (zmniejszyć współrzędną y o 1).

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$
\begin{aligned}
x_B - 2 &= 3 \\
y_B - 3 &= -1
\end{aligned}
$$

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$
$$y_B - 3 = -1$$

Otrzymujemy $x_B = 5$ oraz $y_B = 2$, czyli $B(5,2)$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Prostsza interpretacja jest następująca: skoro $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, to znaczy, że wektor $\vec{v}$ ma nas prowadzić z punktu A do punktu B. Startując z $A(2,3)$ mamy zwiększyć współrzędną x o 3 i zmniejszyć współrzędną y o 1. Otrzymujemy $B(5,2)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$\begin{aligned} 1 - x_A &= 1 \\ 5 - y_A &= -2 \end{aligned}$$

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$\begin{aligned} 1 - x_A &= 1 \\ 5 - y_A &= -2 \end{aligned}$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0,7)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$\begin{aligned} 1 - x_A &= 1 \\ 5 - y_A &= -2 \end{aligned}$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0, 7)$.

Zastanów się nad prostszą interpretacją tego zadania.

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ są:

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ są:

równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ są:

równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,

przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ są:

- równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,
- przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,
- równoległe, gdy istnieje liczba rzeczywista p taka, że $v_x = p \times u_x$ oraz $v_y = p \times u_y$.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2m - 3 \\ 3m \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} n \\ n - 5 \end{pmatrix}$ są przeciwne.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2m-3 \\ 3m \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} n \\ n-5 \end{pmatrix}$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2m - 3 &= -n \\ 3m &= -(n-5) \end{aligned}$$

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2m-3 \\ 3m \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} n \\ n-5 \end{pmatrix}$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2m-3 &= -n \\ 3m &= -(n-5) \end{aligned}$$

Otrzymujemy $m = 2$ oraz $n = -1$.

Przykład 5

Znajdź wartości parametru k, dla którego wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ są równoległe.

Przykład 5

Znajdź wartości parametru k, dla którego wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2 &= p \times (-4) \\ k &= p \times 1 \end{aligned}$$

Przykład 5

Znajdź wartości parametru k, dla którego wektory $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ oraz $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$2 = p \times (-4)$$
$$k = p \times 1$$

Otrzymujemy $k = -\frac{1}{2}$.

Długość wektora

Długość danego wektora $\vec{v}$ oznaczamy $|\vec{v}|$ i obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

Długość wektora

Długość danego wektora $\vec{v}$ oznaczamy $|\vec{v}|$ i obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$.

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1,-3)$ od punktu $B(2,1)$. Znajdujemy wektor

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i obliczamy jego długość

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$. Znajdujemy wektor

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ i obliczamy jego długość

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Oczywiście zamiast wektora $\overrightarrow{AB}$ mogliśmy znaleźć wektor $\overrightarrow{BA}$ i obliczyć

jego długośc - wynik byłby ten sam.

Na wejściówce będzie zadanie podobne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.