Ciągi arytmetyczne

Musimy umieć ustalić różnicę i obliczyć *n*-ty wyraz danego ciągu arytmetycznego.

Definicja

Ciąg arytmetyczny to ciąg, w którym różnica między kolejnymi wyrazami jest stała, czyli

$$a_{n+1} - a_n = const$$

Tę stałą różnicę w ciągu arytmetycznym będziemy oznaczali literą r. Czyli $a_{n+1} - a_n = r$ lub równoważnie $a_{n+1} = a_n + r$.

Definicja

Ciąg arytmetyczny to ciąg, w którym różnica między kolejnymi wyrazami jest stała, czyli

$$a_{n+1} - a_n = const$$

Tę stałą różnicę w ciągu arytmetycznym będziemy oznaczali literą r. Czyli $a_{n+1} - a_n = r$ lub równoważnie $a_{n+1} = a_n + r$.

Czyli ta różnica to jest to, co dodajemy do danego wyrazu, by otrzymać kolejny.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, ...$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, ...$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, ...$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 0.

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \dots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \dots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \dots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \dots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 0.
- $1, 2, 4, 8, \dots$

Przykłady

Sprawdźmy, czy podane ciągi są arytmetyczne.

- $1, 5, 9, 13, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 4.
- $7, 4, 1, -2, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi -3.
- $1, -1, 1, -1, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, raz wynosi -2, innym razem 2.
- $5, 5, 5, 5, \ldots$ arytmetyczny, gdyż różnica jest stała i wynosi 0.
- $1, 2, 4, 8, \ldots$ nie jest arytmetyczny, gdyż różnica nie jest stała, $2 - 1 \neq 4 - 2 \neq 8 - 4$.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Mamy a_1 i r.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Mamy a_1 i r.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\ a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r \end{aligned}$$

itd.

Ważny i prosty wzór

Jeśli mamy dany ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi a_1, a różnica r, to łatwo możemy obliczyć dowolny wyraz tego ciągu.

Mamy a_1 i r.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\ a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r \end{aligned}$$

itd. Nietrudno uogólnić ten wzór do $a_n = a_1 + (n-1)r$. Czyli np. $a_{17} = a_1 + 16r$ i $a_{100} = a_1 + 99r$.

Ważny i prosty wzór

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Prosta konsekwencja ważnego i prostego wzoru

Żeby uzyskać wyraz n-ty to muszę do wyrazu pierwszego dodać $(n-1)$ razy różnicę r. Jeśli natomiast chcę uzyskać wyraz n-ty, ale zaczynając od wyrazu k-tego, to muszę dodać $(n-k)$ razy r. Czyli

$$a_n = a_k + (n-k)r$$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23 \ldots$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23\ldots$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

b) $10, 7, 4, 1...$

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23...$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

b) $10, 7, 4, 1...$
Obliczamy różnicę: $r = 7 - 10 = -3$.

Przykłady

Oblicz 20 wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych:

a) $2, 9, 16, 23 \ldots$
Obliczamy różnicę: $r = 9 - 2 = 7$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 133 = 135$

b) $10, 7, 4, 1 \ldots$
Obliczamy różnicę: $r = 7 - 10 = -3$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{20} = a_1 + 19r = 10 - 57 = -47$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

b) $a_{20} = 10$, $a_{40} = 90$

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

b) $a_{20} = 10$, $a_{40} = 90$
Obliczamy różnicę: $20r = a_{40} - a_{20} = 90 - 10 = 80$, czyli $r = 4$.

Przykłady

Oblicz jedenasty wyraz każdego z podanych ciągów arytmetycznych, o których wiemy, że:

a) $a_4 = 11$, $a_6 = 21$
Obliczamy różnicę: $2r = a_6 - a_4 = 21 - 11 = 10$, czyli $r = 5$.
Obliczamy jedenasty wyraz $a_{11} = a_4 + 7r = 11 + 35 = 46$

b) $a_{20} = 10$, $a_{40} = 90$
Obliczamy różnicę: $20r = a_{40} - a_{20} = 90 - 10 = 80$, czyli $r = 4$.
Obliczamy dwudziesty wyraz $a_{11} = a_{20} - 9r = 10 - 36 = -26$

Podsumowanie

Najważniejsze jest to, by pamiętać, jak powstają kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego - poprzez dodanie stałej różnicy r. Jeśli więc chce uzyskać wyraz numer 17 z wyrazu numer 12, to muszę tę różnicę dodać 5 razy, czyli $a_{17} = a_{12} + 5r$. Analogicznie jeśli chcę otrzymać wyraz numer 36 z wyrazu numer 51, to muszę różnicę odjąć 15 razy, czyli $a_{36} = a_{51} - 15r$.

Wejściówka

Na wejściówkę trzeba umieć rozwiązać przykłady analogiczne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.