

Przesunięcia równoległe

Mając dany wykres funkcji $f(x)$ musimy umieć naszkicować wykresy funkcji $g(x) = f(x \pm a) \pm b$, gdzie a i b to stałe.

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$. Zbiór wartości $y \in \mathbb{R}$.

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$. Zbiór wartości $y \in \mathbb{R}$.

Miejsca zerowe:

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$. Zbiór wartości $y \in \mathbb{R}$.

Miejsca zerowe: $x = -1, x = 1, x = 2$.

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$. Zbiór wartości $y \in \mathbb{R}$.

Miejsca zerowe: $x = -1, x = 1, x = 2$.

Przecięcie z osią OY:

Zadanie wprowadzające

Proszę wejść na stronę:

<https://www.desmos.com/calculator>

i w polu po lewej stronie wpisać funkcję:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

Odczytajmy wybrane własności wykresu:

Dziedzina: $x \in \mathbb{R}$. Zbiór wartości $y \in \mathbb{R}$.

Miejsca zerowe: $x = -1, x = 1, x = 2$.

Przecięcie z osią OY: $(0, 2)$.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod $f(x)$)

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla a . Proszę go dodać.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod $f(x)$)

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla a . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $g(x)$.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod $f(x)$)

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla a . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $g(x)$.

Gdy $a = 0$, to $g(x) = f(x)$ i wykresy się pokrywają.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod $f(x)$)

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla a . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $g(x)$.

Gdy $a = 0$, to $g(x) = f(x)$ i wykresy się pokrywają. Gdy $a = 2$, to wykres funkcji $g(x)$ powstał z przesunięcia wykresu funkcji $f(x)$ o dwie jednostki do góry.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić teraz drugą funkcję (w polu pod $f(x)$)

$$g(x) = f(x) + a$$

Powinno się pojawić pytanie, czy dodać suwak dla a . Proszę go dodać.

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $g(x)$.

Gdy $a = 0$, to $g(x) = f(x)$ i wykresy się pokrywają. Gdy $a = 2$, to wykres funkcji $g(x)$ powstał z przesunięcia wykresu funkcji $f(x)$ o dwie jednostki do góry. Gdy $a = -3$, to wykres funkcji $g(x)$ powstał z przesunięcia wykresu funkcji $f(x)$ o trzy jednostki w dół.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ($g(x)$ można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla b .

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ($g(x)$ można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla b .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $h(x)$.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ($g(x)$ można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla b .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $h(x)$.

Gdy $b = 0$, to oczywiście $h(x) = f(x)$ i wykresy się pokrywają.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ($g(x)$ można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla b .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $h(x)$.

Gdy $b = 0$, to oczywiście $h(x) = f(x)$ i wykresy się pokrywają. Gdy $b = 2$, to wykres funkcji $h(x)$ powstał z przesunięcia wykresu funkcji $f(x)$ o dwie jednostki **w lewo**.

Zadanie wprowadzające

Proszę wprowadzić kolejną funkcję ($g(x)$ można odznaczyć)

$$h(x) = f(x + b)$$

Znów chcemy dodać suwak dla b .

Przesuwając suwakiem możemy zobaczyć, jak zmienia się wykres funkcji $h(x)$.

Gdy $b = 0$, to oczywiście $h(x) = f(x)$ i wykresy się pokrywają. Gdy $b = 2$, to wykres funkcji $h(x)$ powstał z przesunięcia wykresu funkcji $f(x)$ o dwie jednostki **w lewo**. Gdy $b = -3$, to wykres funkcji $g(x)$ powstał z przesunięcia wykresu funkcji $f(x)$ o trzy jednostki **w prawo**.

Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

- wykres funkcji $f(x) + 2$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor $[0, 2]$,

Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

- wykres funkcji $f(x) + 2$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor $[0, 2]$,
- wykres funkcji $f(x) - 8$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor $[0, -8]$,

Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

- wykres funkcji $f(x) + 2$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor $[0, 2]$,
- wykres funkcji $f(x) - 8$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor $[0, -8]$,
- wykres funkcji $f(x + 13)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor $[-13, 0]$,

Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

- wykres funkcji $f(x) + 2$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor $[0, 2]$,
- wykres funkcji $f(x) - 8$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor $[0, -8]$,
- wykres funkcji $f(x + 13)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor $[-13, 0]$,
- wykres funkcji $f(x - 1)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 1 w prawo, czyli o wektor $[1, 0]$,

Podsumowanie

Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

- wykres funkcji $f(x) + 2$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor $[0, 2]$,
- wykres funkcji $f(x) - 8$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor $[0, -8]$,
- wykres funkcji $f(x + 13)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor $[-13, 0]$,
- wykres funkcji $f(x - 1)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 1 w prawo, czyli o wektor $[1, 0]$,

Podsumowanie

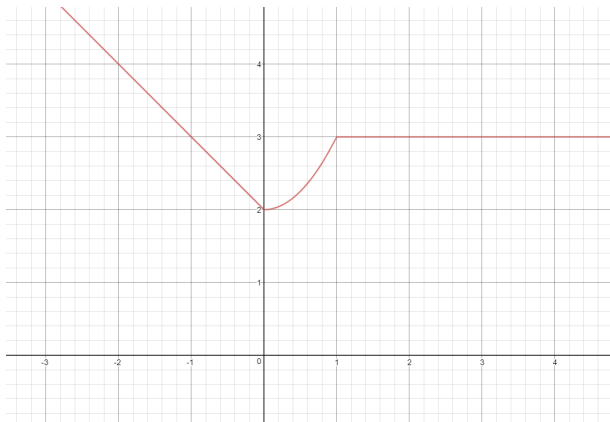
Mając dany wykres funkcji $f(x)$:

- wykres funkcji $f(x) + 2$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 2 do góry, czyli o wektor $[0, 2]$,
- wykres funkcji $f(x) - 8$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 8 w dół, czyli o wektor $[0, -8]$,
- wykres funkcji $f(x + 13)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 13 w lewo, czyli o wektor $[-13, 0]$,
- wykres funkcji $f(x - 1)$, to wykres $f(x)$ przesunięty o 1 w prawo, czyli o wektor $[1, 0]$,

Uwaga na znaki. Może się wydawać, że w trzecim i czwartym wypadku jest coś odwrotnie. Wyjaśnimy to na zajęciach.

Przykład 1

Diagram przedstawia wykres funkcji $f(x)$



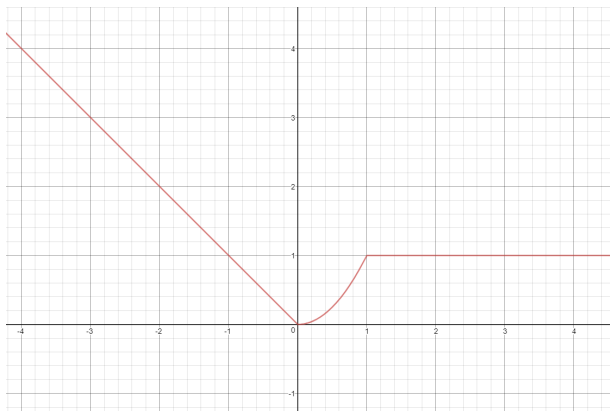
Naszkiuj funkcje $f(x) - 2$ oraz $f(x + 1)$.

Przykład 1

$f(x) - 2$ to przesunięcie wykresu f o 2 jednostki w dół:

Przykład 1

$f(x) - 2$ to przesunięcie wykresu f o 2 jednostki w dół:

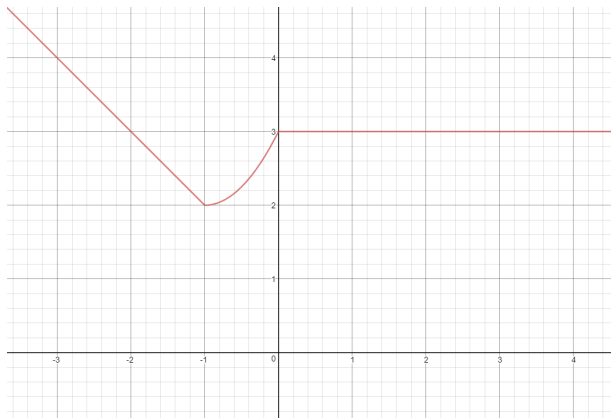


Przykład 1

$f(x + 1)$ to przesunięcie wykresu f o 1 jednostkę w lewo:

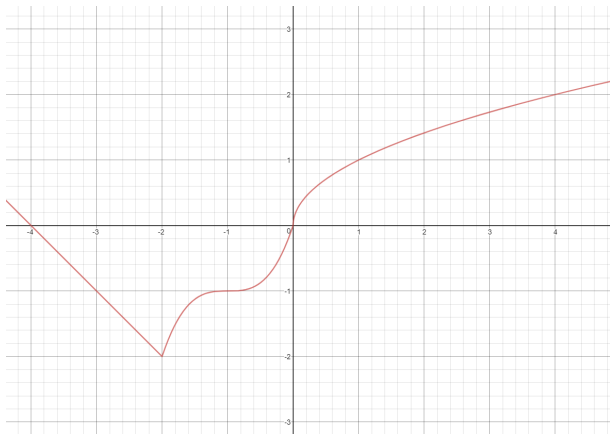
Przykład 1

$f(x + 1)$ to przesunięcie wykresu f o 1 jednostkę w lewo:



Przykład 2

Diagram przedstawia wykres funkcji $f(x)$



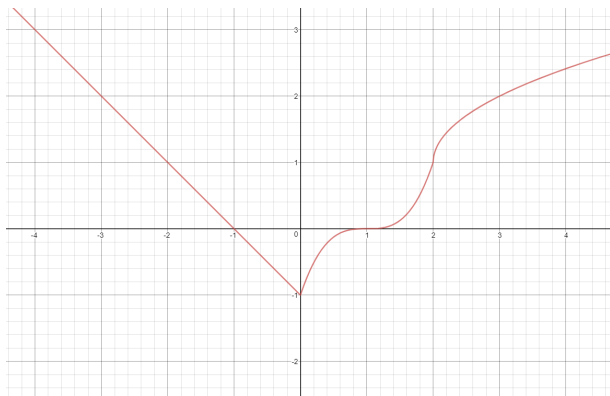
Naszkiuj funkcje $f(x - 2) + 1$.

Przykład 2

$f(x - 2) + 1$ to przesunięcie wykresu f o 1 jednostkę do góry i o 2 jednostki w prawo:

Przykład 2

$f(x - 2) + 1$ to przesunięcie wykresu f o 1 jednostkę do góry i o 2 jednostki w prawo:



Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

a) $g(x) = f(x + 1) + 1$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = f(x - 5) + 22$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = f(x - 5) + 22$. Wykres funkcji f został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to $[5, 22]$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = f(x - 5) + 22$. Wykres funkcji f został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to $[5, 22]$.
- c) $g(x) = f(x - 3) - 13$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = f(x - 5) + 22$. Wykres funkcji f został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to $[5, 22]$.
- c) $g(x) = f(x - 3) - 13$. Wykres funkcji f został przesunięty o 13 w dół oraz o 3 w prawo. Szukany wektor to $[3, -13]$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = f(x - 5) + 22$. Wykres funkcji f został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to $[5, 22]$.
- c) $g(x) = f(x - 3) - 13$. Wykres funkcji f został przesunięty o 13 w dół oraz o 3 w prawo. Szukany wektor to $[3, -13]$.
- d) $g(x) = f(x + 11) - 11$.

Przykład 3

Dla podanych funkcji $g(x)$ podaj wektor, o który należy przesunąć wykres funkcji $f(x)$, by otrzymać wykres funkcji $g(x)$.

- a) $g(x) = f(x + 1) + 1$. Wykres funkcji f został przesunięty o 1 do góry oraz o 1 w lewo. Szukany wektor to $[-1, 1]$.
- b) $g(x) = f(x - 5) + 22$. Wykres funkcji f został przesunięty o 22 do góry oraz o 5 w prawo. Szukany wektor to $[5, 22]$.
- c) $g(x) = f(x - 3) - 13$. Wykres funkcji f został przesunięty o 13 w dół oraz o 3 w prawo. Szukany wektor to $[3, -13]$.
- d) $g(x) = f(x + 11) - 11$. Wykres funkcji f został przesunięty o 11 w dół oraz o 11 w lewo. Szukany wektor to $[-11, -11]$.

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

a) $[3, 3]$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b) $[-1, 2]$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b) $[-1, 2]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b) $[-1, 2]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c) $[-5, -13]$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b) $[-1, 2]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c) $[-5, -13]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 13 w dół oraz o 5 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 5} - 13$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b) $[-1, 2]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c) $[-5, -13]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 13 w dół oraz o 5 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 5} - 13$
- d) $[7, -2]$

Przykład 4

Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x}$. Zapisz wzór funkcji $g(x)$, której wykres powstał po przesunięciu wykresu funkcji o wektor:

- a) $[3, 3]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 3 do góry oraz o 3 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 3} + 3$
- b) $[-1, 2]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 2 do góry oraz o 1 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 1} + 2$
- c) $[-5, -13]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 13 w dół oraz o 5 w lewo, czyli $g(x) = \sqrt{x + 5} - 13$
- d) $[7, -2]$ Wykres funkcji f został przesunięty o 2 w dół oraz o 7 w prawo, czyli $g(x) = \sqrt{x - 7} - 2$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.