Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów

Musimy znać wartości funkcji $\sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$ dla kątów $30^\circ, 45^\circ$ i 60°.

Na następnych slajdach obliczymy te wartości korzystając z własności trójkątów charakterystycznych.

Trójkąt 45°-45°-90°

Trójkąt o kątach 45°-45°-90° to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.

Trójkąt 45°-45°-90°

Trójkąt o kątach 45°-45°-90° to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.

Zastanów się, dlaczego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.

Trójkąt 45°-45°-90°

Trójkąt o kątach 45°-45°-90° to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.

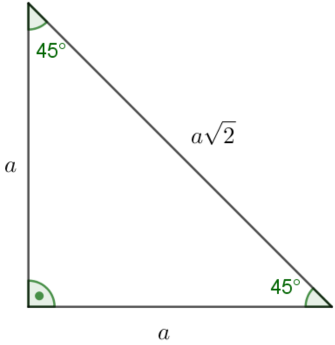
Zastanów się, dlaczego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.
Podpowiedź:

Trójkąt 45°-45°-90°

Trójkąt o kątach 45°-45°-90° to trójkąt prostokątny i równoramienny. Oznacza to, że jego przyprostokątne mają tę samą długość, a jego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.

Zastanów się, dlaczego przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej.
Podpowiedź: wykorzystaj twierdzenie Pitagorasa.

Trójkąt 45°-45°-90°



Trójkąt 45°-45°-90°

Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uwaga: zauważ, że nie ma znaczenia, który kąt 45° wybierzemy, w obu przypadkach sin i cos będą wynosiły tyle samo.

Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uwaga: zauważ, że nie ma znaczenia, który kąt 45° wybierzemy, w obu przypadkach sin i cos będą wynosiły tyle samo.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Trójkąt 45°-45°-90°

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uwaga: zauważ, że nie ma znaczenia, który kąt 45° wybierzemy, w obu przypadkach sin i cos będą wynosiły tyle samo.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Trójkąt 30°-60°-90°

Trójkąt o kątach 30°-60°-90° to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta 30°) oznaczymy literą a, to jego pozostałe boki będą miały długości $a\sqrt{3}$ (bok naprzeciwko kąta 60°) oraz $2a$ (przeciwprostokątna).

Trójkąt 30°-60°-90°

Trójkąt o kątach 30°-60°-90° to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta 30°) oznaczymy literą a, to jego pozostałe boki będą miały długości $a\sqrt{3}$ (bok naprzeciwko kąta 60°) oraz $2a$ (przeciwprostokątna).

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić powyższe zależności.

Trójkąt 30°-60°-90°

Trójkąt o kątach 30°-60°-90° to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta 30°) oznaczymy literą a, to jego pozostałe boki będą miały długości $a\sqrt{3}$ (bok naprzeciwko kąta 60°) oraz $2a$ (przeciwprostokątna).

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić powyższe zależności.

Podpowiedź:

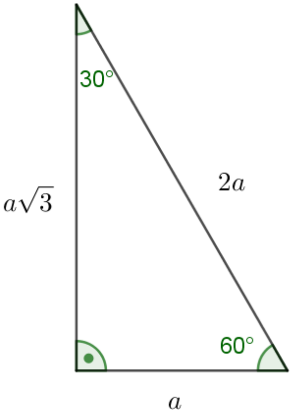
Trójkąt 30°-60°-90°

Trójkąt o kątach 30°-60°-90° to trójkąt prostokątny będący połową trójkąta równobocznego. Jeśli jego najkrótszy bok (będący naprzeciwko kąta 30°) oznaczymy literą a, to jego pozostałe boki będą miały długości $a\sqrt{3}$ (bok naprzeciwko kąta 60°) oraz $2a$ (przeciwprostokątna).

Spróbuj samodzielnie wyprowadzić powyższe zależności.

Podpowiedź: zacznij od narysowania trójkąta równobocznego o boku $2a$ i podziel ten trójkąt na pół rysując wysokość z jednego z wierzchołków.

Trójkąt 30°-60°-90°



Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Trójkąt 30°-60°-90°

$$\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tabela z wartościami

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie

Na wejściówce będzie zadanie podobne do następującego:

Zadanie

Na wejściówce będzie zadanie podobne do następującego:

Oblicz:

$$4\sin 30^\circ + (2\cos 30^\circ)^2 - (5\,\mathrm{tg}\,30^\circ \times \mathrm{ctg}\,60^\circ + \mathrm{ctg}\,30^\circ \times \sin 60^\circ)$$

Zadanie

$$4\sin 30^\circ + (2\cos 30^\circ)^2 - (5\,\mathrm{tg}\,30^\circ \times \mathrm{ctg}\,60^\circ + \mathrm{ctg}\,30^\circ \times \sin 60^\circ) =$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} + \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2 + 3 - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{19}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

Zadanie

$$4 \sin 30^\circ + (2 \cos 30^\circ)^2 - (5 \operatorname{tg} 30^\circ \times \operatorname{ctg} 60^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \times \sin 60^\circ) =$$

$$= 2 + 3 - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2} \right) = 5 - \frac{19}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

Zadanie

$$4\sin 30^\circ + (2\cos 30^\circ)^2 - (5\,\mathrm{tg}\,30^\circ \times \mathrm{ctg}\,60^\circ + \mathrm{ctg}\,30^\circ \times \sin 60^\circ) =$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} + \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(5 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 2 + 3 - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) = 5 - \frac{19}{6} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.