Zadania powtórzeniowe

Zadanie 1

Iloczyn piątego i jedenastego wyrazu w ciągu geometrycznym wynosi 4. Oblicz iloczyn piętnastu początkowych wyrazów.

Zadanie 1 - rozwiązanie

Mamy dane:

$$a_5 \times a_{11} = 4$$

Z tej równości możemy od razu policzyć wyraz, który jest dokładnie pomiędzy piątym a jedenastym, czyli wyraz ósmy:

Zadanie 1 - rozwiązanie

Mamy dane:

$$a_5 \times a_{11} = 4$$

Z tej równości możemy od razu policzyć wyraz, który jest dokładnie pomiędzy piątym a jedenastym, czyli wyraz ósmy:

$$\frac{a_8}{q^3} \times a_8 \times q^3 = 4$$

Otrzymujemy $a_8^2 = 4$, czyli $a_8 = \pm 2$.

Zadanie 1 - rozwiązanie

Mamy dane:

$$a_5 \times a_{11} = 4$$

Z tej równości możemy od razu policzyć wyraz, który jest dokładnie pomiędzy piątym a jedenastym, czyli wyraz ósmy:

$$\frac{a_8}{q^3} \times a_8 \times q^3 = 4$$

Otrzymujemy $a_8^2 = 4$, czyli $a_8 = \pm 2$.
Chcemy policzyć:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_{15}$$

Znów wykorzystamy środkowy wyraz:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_{15} = a_8^{15} = (\pm 2)^{15} = \pm 32768$$

Zadanie 2

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich:

$$x - 3, x + 3, 6x + 2, \ldots$$

Wykaż, że $\dfrac{S_{19}}{S_{20}} < \dfrac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę początkowych n wyrazów tego ciągu.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Skoro jest to ciąg geometryczny, to mamy: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Skoro jest to ciąg geometryczny, to mamy: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 5$ lub $x = -\frac{3}{5}$. Odrzucamy drugą możliwość, gdyż wyrazu ciągu mają być dodatnie, a więc $x = 5$.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Skoro jest to ciąg geometryczny, to mamy: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 5$ lub $x = -\frac{3}{5}$. Odrzucamy drugą możliwość, gdyż wyrazu ciągu mają być dodatnie, a więc $x = 5$. Obliczamy q.

Zadanie 2 - rozwiązanie

Skoro jest to ciąg geometryczny, to mamy: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 5$ lub $x = -\frac{3}{5}$. Odrzucamy drugą możliwość, gdyż wyrazu ciągu mają być dodatnie, a więc $x = 5$. Obliczamy q.

$$q = \frac{x+3}{x-3} = \frac{8}{2} = 4$$

Zadanie 2 - rozwiązanie

Skoro jest to ciąg geometryczny, to mamy: $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$. Rozwiązujemy i otrzymujemy $x = 5$ lub $x = -\frac{3}{5}$. Odrzucamy drugą możliwość, gdyż wyrazu ciągu mają być dodatnie, a więc $x = 5$. Obliczamy q.

$$q = \frac{x+3}{x-3} = \frac{8}{2} = 4$$

Obliczamy $\frac{S_{19}}{S_{20}}$

$$\frac{S_{19}}{S_{20}} = \frac{\frac{2(4^{19}-1)}{4-1}}{\frac{2(4^{20}-1)}{4-1}} = \frac{4^{19}-1}{4^{20}-1} < \frac{4^{19}-1}{4^{20}-4} = \frac{4^{19}-1}{4(4^{19}-1)} = \frac{1}{4}$$

Czyli

$$\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$$

Zadanie 3

Ciąg geometryczny dany jest wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geqslant 1$.

a) Oblicz iloraz tego ciągu.

b) Oblicz $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + ... + \log_3 a_{100}$.

Zadanie 3 - rozwiązanie

Obliczamy $a_1 = 3^0 = 1$, $a_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. Czyli iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Zadanie 3 - rozwiązanie

Obliczamy $a_1 = 3^0 = 1$, $a_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. Czyli iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Zauważmy, że $\log_3 a_n = \log_3 3^{1-n} = 1 - n$, a więc:

Zadanie 3 - rozwiązanie

Obliczamy $a_1 = 3^0 = 1$, $a_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. Czyli iloraz $q = \frac{1}{3}$.

Zauważmy, że $\log_3 a_n = \log_3 3^{1-n} = 1 - n$, a więc:

$$
\begin{aligned}
&\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + ... + \log_3 a_{100} = \\
=&(1-1) + (1-2) + (1-3) + ... + (1-100) = \\
=&0 - 1 - 2 - ... - 99 = \\
=&\frac{100}{2}(0 - 99) = -4950
\end{aligned}
$$