

Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów

Musimy znać wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.

Wzory

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Proste konsekwencje tych wzorów:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Proste konsekwencje tych wzorów:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Jeśli te konsekwencje nie są dla Was jednak proste, to proszę mi o tym powiedzieć na lekcji - wyjaśnimy.

Udowodnimy jeden ze wspomnianych wzorów. Pozostałe można będzie już łatwo wyprowadzić przez odpowiednie podstawienia.

Udowodnimy jeden ze wspomnianych wzorów. Pozostałe można będzie już łatwo wyprowadzić przez odpowiednie podstawienia. Udowodnimy:

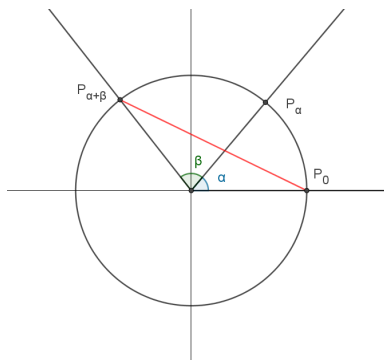
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Dowód

Oznaczmy na okręgu jednostkowym kąt $\alpha + \beta$.

Dowód

Oznaczmy na okręgu jednostkowym kąt $\alpha + \beta$.



Wtedy $\cos(\alpha + \beta)$ to współrzędna x punktu $P_{\alpha+\beta}$. Obliczymy długość odcinka $P_0P_{\alpha+\beta}$.

Dowód

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

Dowód

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

Otrzymujemy:

Dowód

Skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

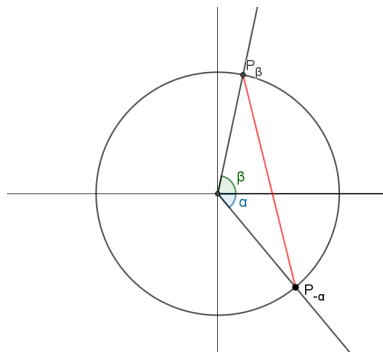
$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = (1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

Otrzymujemy:

$$|P_0 P_{\alpha+\beta}|^2 = 1 - 2 \cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta)$$

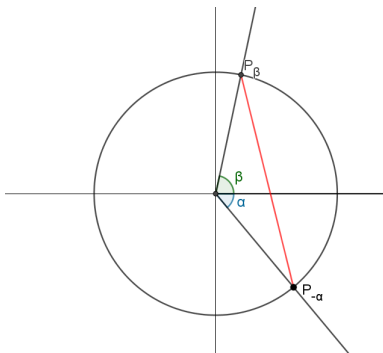
Dowód

Obróćmy teraz nieco nasz trójkąt:



Dowód

Obróćmy teraz nieco nasz trójkąt:



Oczywiście trójkąt się nie zmienił, więc czerwony odcinek ma tę samą długość, czyli

$$|P_0 P_{\alpha+\beta}| = |P_{-\alpha} P_\beta|$$

Dowód

Obliczmy $|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2$.

Dowód

Obliczmy $|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2$.

$$|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2 = (\cos \beta - \cos(-\alpha))^2 + (\sin(-\alpha) - \sin \beta)^2$$

Dowód

Obliczmy $|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2$.

$$|P_{-\alpha}P_{\beta}|^2 = (\cos \beta - \cos(-\alpha))^2 + (\sin(-\alpha) - \sin \beta)^2$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |P_{-\alpha}P_{\beta}|^2 &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \\ &+ \sin^2(-\alpha) - 2 \sin(-\alpha) \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ &= 2 - 2 \cos \beta \cos \alpha + 2 \sin \beta \sin \alpha \end{aligned}$$

Dowód

Otrzymaliśmy ostatecznie:

$$2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \beta \cos \alpha + 2 \sin \beta \sin \alpha$$

Dowód

Otrzymaliśmy ostatecznie:

$$2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \beta \cos \alpha + 2 \sin \beta \sin \alpha$$

Czyli:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$$

Podsumowanie

W kilku miejscach tego dowodu zastosowane zostały dosyć szybkie przejścia. Ambitniejsze osoby proszę, by spróbowały dokładnie zrozumieć ten dowód, a w razie wątpliwości wyjaśnimy je na zajęciach.

Zastosowanie

Obliczmy $\sin 105^\circ$.

Obliczmy $\sin 105^\circ$.

$$\begin{aligned}\sin(105^\circ) &= \sin(45^\circ + 60^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Zastosowanie

Obliczmy $\cos \frac{\pi}{12}$.

Zastosowanie

Obliczmy $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Zastosowanie

Obliczmy $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Wynik ten był do przewidzenia, gdyż:

$$\sin 105^\circ = \sin \frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12}$$

Wejściówka

Na wejściówkę trzeba znać wzory z prezentacji i umieć je zastosować do policzenia sinusa bądź cosinusa kąta, który może być zapisany jako suma lub różnica jednego ze znanych nam kątów.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.