Wprowadzenie do trygonometrii

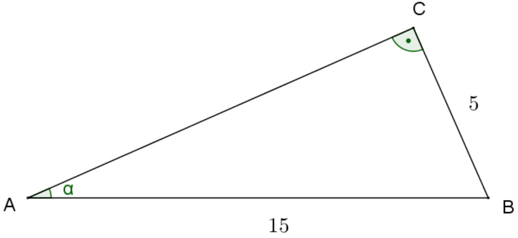
Musimy umieć:

- obliczyć wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, gdy dane są dwa boki tego trójkąta,
- obliczyć długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego, gdy dany jest jeden bok i wartość jednej z funkcji trygonometrycznych ostrego kąta,
- obliczyć długości pozostałych boków trójkąta prostokątnego, gdy dany jest jeden bok i jeden kąt ostry w tym trójkącie.

Na następnych slajdach omówione zostaną trzy zadania, które ilustrują powyższe punkty. Podobnych zadań należy oczekiwać na wejściówce.

Zadanie 1

Dany jest trójkąt prostokątny ABC taki, że $|AB| = 15$, $|BC| = 5$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = 90^\circ$ (patrz rysunek).



Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 1

Definicja $\sin\alpha$

W trójkącie prostokątnym *sinus* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta do przeciwprostokątnej (hypotenuse).

Zadanie 1

Definicja $\sin\alpha$

W trójkącie prostokątnym *sinus* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta do przeciwprostokątnej (hypotenuse).

W zadaniu przyprostokątna naprzeciwko kąta α ma długość 5, natomiast przeciwprostokątna ma długość 15. W związku z tym:

$$\sin\alpha = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 1

Definicja $\cos\alpha$

W trójkącie prostokątnym *cosinus* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta do przeciwprostokątnej (hypotenuse).

Zadanie 1

Definicja $\cos\alpha$

W trójkącie prostokątnym *cosinus* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta do przeciwprostokątnej (hypotenuse).

W zadaniu nie znamy długości przyprostokątnej przyległej do kąta α. Musimy ją obliczyć z twierdzenia Pitagorasa.

$$\begin{aligned}|AC|^2 + |BC|^2 &= |AB|^2 \\ |AC|^2 + 25 &= 225 \\ |AC|^2 &= 200 \\ |AC| &= 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

Zadanie 1

Przeciwprostokątna ma długość 15. W związku z tym:

$$\cos\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Zadanie 1

Definicja $\operatorname{tg}\alpha$

W trójkącie prostokątnym *tangens* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta do przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta.

Zadanie 1

Definicja $\operatorname{tg}\alpha$

W trójkącie prostokątnym *tangens* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta do przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta.

W zadaniu przyprostokątna na przeciwko kąta α ma długość 5, natomiast przyprostokątna przyległa, jak obliczyliśmy, ma długość $10\sqrt{2}$. W związku z tym:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Zadanie 1

Definicja ctg α

W trójkącie prostokątnym *cotangens* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta do przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta.

Zadanie 1

Definicja $\operatorname{ctg} \alpha$

W trójkącie prostokątnym *cotangens* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta do przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta.

Uwaga, zgodnie z definicją:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Zadanie 1

Definicja ctg α

W trójkącie prostokątnym *cotangens* danego kąta ostrego to stosunek przyprostokątnej przyległej (adjacent) do danego kąta do przyprostokątnej leżącej naprzeciw (opposite) danego kąta.

Uwaga, zgodnie z definicją:

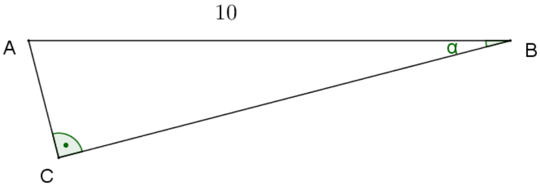
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

W związku z tym:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$$

Zadanie 2

Dany jest trójkąt prostokątny ABC taki, że $|AB| = 10$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCA = 90^\circ$ (patrz rysunek).



Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli wiadomo, że $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

Zadanie 2

Z definicji *sinusa* wiemy, że w tym zadaniu:

$$\sin \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Zadanie 2

Z definicji *sinusa* wiemy, że w tym zadaniu:

$$\sin \alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Ponieważ znamy wartość $\sin \alpha$, możemy obliczyć długość boku AC:

Zadanie 2

Z definicji *sinusa* wiemy, że w tym zadaniu:

$$\sin\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Ponieważ znamy wartość $\sin\alpha$, możemy obliczyć długość boku AC:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{5}$$
$$|AC| = \frac{1}{5}|AB|$$
$$|AC| = 2$$

Zadanie 2

Długość boku BC obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

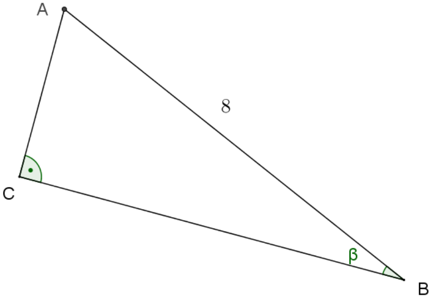
Zadanie 2

Długość boku BC obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$
$$4 + |BC|^2 = 100$$
$$|BC|^2 = 96$$
$$|BC| = 4\sqrt{6}$$

Zadanie 3

Dany jest trójkąt prostokątny ABC taki, że $|AB| = 8$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = 90^\circ$ (patrz rysunek).



Oblicz długości pozostałych boków trójkąta, jeśli wiadomo, że $\beta = 25^\circ$.

Zadanie 3

Z definicji wiemy, że:

$$\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\cos\beta = \frac{|BC|}{|AB|}$$

Zadanie 3

Z definicji wiemy, że:

$$\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\cos\beta = \frac{|BC|}{|AB|}$$

Jeśli $\beta = 25^\circ$, to możemy odczytać wartości $\sin\beta$ i $\cos\beta$ z tablic matematycznych lub obliczyć je na kalkulatorze:

$$\sin 25^\circ \approx 0,423 \qquad \cos 25^\circ \approx 0,906$$

Zadanie 3

Możemy teraz obliczyć długości przyprostokątnych:

Zadanie 3

Możemy teraz obliczyć długości przyprostokątnych:

$$|AC| = |AB| \times \sin\beta$$
$$|AC| \approx 8 \times 0,423$$
$$|AC| \approx 3,38$$

Zadanie 3

Możemy teraz obliczyć długości przyprostokątnych:

$$|AC| = |AB| \times \sin\beta$$
$$|AC| \approx 8 \times 0,423$$
$$|AC| \approx 3,38$$

$$|AC| = |AB| \times \cos\beta$$
$$|AC| \approx 8 \times 0,906$$
$$|AC| \approx 7,25$$

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.