

# Twierdzenie cosinusów

Musimy znać twierdzenie cosinusów i umieć je zastosować do obliczania boków oraz kątów trójkąta.

Na następnych slajdach omówione zostaną trzy przykłady zastosowania twierdzenia cosinusów.

# Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

# Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Uwaga:  $\alpha$  to kąt naprzeciwko boku  $a$ ,  $\beta$  to kąt na przeciwko boku  $b$ ,  $\gamma$  to kąt naprzeciwko boku  $c$ .

# Twierdzenie cosinusów

Gdy szukamy kątów, powyższe równania można przekształcić do postaci:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

## Przykład 1

W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 5$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Oblicz długość boku  $AC$ .

## Przykład 1

W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 5$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Oblicz długość boku  $AC$ .

Ważna obserwacja: bok  $AC$  leży na przeciwko kąta  $\angle ABC$ .

## Przykład 1

W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AB| = 8$ ,  $|BC| = 5$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Oblicz długość boku  $AC$ .

Ważna obserwacja: bok  $AC$  leży na przeciwko kąta  $\angle ABC$ .

Przy standardowych oznaczeniach, z twierdzenia cosinusów mamy:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$b^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 120^\circ$$

$$b^2 = 25 + 64 - 80 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$b^2 = 129$$

$$b = \sqrt{129}$$



## Przykład 2

W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AB| = 4$ ,  $|AC| = 3\sqrt{2}$  i  $|BC| = \sqrt{10}$ .  
Oblicz miarę kąta  $\angle BAC$ .

## Przykład 2

W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AB| = 4$ ,  $|AC| = 3\sqrt{2}$  i  $|BC| = \sqrt{10}$ .  
Oblicz miarę kąta  $\angle BAC$ .

Ważna obserwacja: kąt  $\angle BAC$  leży na przeciwko boku  $BC$ .

## Przykład 2

W trójkącie  $ABC$  mamy dane  $|AB| = 4$ ,  $|AC| = 3\sqrt{2}$  i  $|BC| = \sqrt{10}$ .  
Oblicz miarę kąta  $\angle BAC$ .

Ważna obserwacja: kąt  $\angle BAC$  leży na przeciwko boku  $BC$ .

Przy standardowych oznaczeniach, z twierdzenia cosinusów mamy:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \alpha &= \frac{(3\sqrt{2})^2 + 4^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 4 \times 3\sqrt{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{18 + 16 - 10}{24\sqrt{2}}\end{aligned}$$

## Przykład 2

Upraszczając otrzymujemy:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

## Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

## Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

Wystarczy wykazać, że *cosinus* kąta naprzeciwko najdłuższego z boków jest ujemny.

## Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

Wystarczy wykazać, że *cosinus* kąta naprzeciwko najdłuższego z boków jest ujemny. (Dlaczego?)

## Przykład 3

Wykaż, że trójkąt o bokach 2,3,4 jest rozwartokątny.

Wystarczy wykazać, że *cosinus* kąta naprzeciwko najdłuższego z boków jest ujemny. (Dlaczego?)

Niech  $\alpha$  to kąt naprzeciwko boku o długości 4. Wtedy:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} \\ \cos \alpha &= \frac{4 + 9 - 16}{12} \\ \cos \alpha &= \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$





Na wejściówce będzie zadania podobne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na [T.J.Lechowski@gmail.com](mailto:T.J.Lechowski@gmail.com).