

Zadanie 470.

Liczby: $\log_2 x$, $\log_2 8x$, $\log_2 64x$ są w podanej kolejności trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu i sumę początkowych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

Zadanie 471.

Wyznacz x , dla którego liczby 8, $2^x + 5$, 23 są odpowiednio pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz największą liczbę n , taką by suma n początkowych wyrazów tego ciągu była mniejsza od 150.

Zadanie 472.

Wyznacz x , dla którego liczby 6, $2x - 1$, 26 są odpowiednio pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę wyrazów tego ciągu od dwudziestego do trzydziestego włącznie.

Zadanie 473.

Oblicz sumę $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)$.

Zadanie 474.

Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych niepodzielnych przez 3.

Zadanie 475.

Uzasadnij, że ciąg, którego wyraz ogólny określony jest wzorem $a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^n$, jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 476.

Uzasadnij, że ciąg, którego wyraz ogólny określony jest wzorem $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$, jest ciągiem geometrycznym

Zadanie 477.

Uzasadnij, że ciąg, którego wyraz ogólny określony jest wzorem $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, nie jest ciągiem geometrycznym.

5. CIĄGI

Zadanie 478.

Uzasadnij, że ciąg, którego wyraz ogólny określony jest wzorem $a_n = 3^n + 17$, nie jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 479.

Udowodnij, że liczby $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ w podanej kolejności nie mogą być wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 480.

Udowodnij, że jeżeli liczby a^2 , b^2 , c^2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy różnej od 0, to liczby $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ są w podanej kolejności również wyrazami ciągu arytmetycznego.

Zadanie 481.

Liczby całkowite a , b , c , d , będące pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^4 - 10x^2 + p$, tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby oraz wartość parametru p .

Zadanie 482.

- W ciągu arytmetycznym stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego równa się 40. Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu równa się -64 ?
- Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego suma początkowych wyrazów tego ciągu spełnia warunek $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

Zadanie 483.

Matura próbna III 2008 r., 3 p.

Dany jest ciąg (x_n) o wyrazie ogólnym $x_n = -1 - n$ dla $n \geq 1$. Ciąg (y_n) ma tę własność, że dla każdego $n \geq 1$ punkty o współrzędnych $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, y_n)$ należą do jednej prostej. Wyznacz wzór ogólny ciągu (y_n) .

Zadanie 484.

Matura V 2006 r., 5 p.

Dany jest ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
- Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b , takie że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leq a_n \leq b$.

Zadanie 485.

Matura próbna I 2005 r., 7 p.

Dany jest ciąg liczbowy (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ określony dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}^+$.

a) Wykaż, korzystając z odpowiedniej definicji, że ciąg (a_n) jest rosnący.

b) Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^6 + n}}{1 - a_n}$.

Zadanie 486.

Matura V 2005 r., 5 p.

Oblicz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}$.

Zadanie 487.

Matura V 2007 r., 4 p.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem

$$S_n = 2n^2 + n \text{ dla } n \geq 1.$$

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

Zadanie 488.

Matura VI 2012 r., 5 p.

W ciągu arytmetycznym (a_n) , dla $n \geq 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2012$.

Zadanie 489.

Matura próbna XI 2004 r., 7 p.

Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$, wiedząc, że $a_{51} = 1$.

Zadanie 490.

Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 + 3n^2 - 7)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 + 3n^4 - 7n^5)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n^3 + 3n^4 + 5n^5)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!}$

5. CIĄGI


 Zadanie 491.

Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 13^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 12^n + 112^n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{10^{50}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{50}}} \right)$

 Zadanie 492.

Oblicz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{31^n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 3}{31^n + 3}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 - 7}{(n-1)^3}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{75} - 123n + 1}{-2n^{75} + 99n^{57} - 100}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 6}{n - 3}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 - 3n + n^5}{4n^3}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n + n^2 - 2n^3}{123n^4}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 5n + 3}{n^5 - 3n^4 - 4n^3 - 5}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)}{n^2 - 5n}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{3n^3 + n - 15}$

(możesz wykorzystać wzór $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Zadanie 493.

Oblicz

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - 12}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{9n^2 + 2n + 4}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{16n^2 + 4n + 1}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 6}{\sqrt{n^4 - 12}}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1}}{-17n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^6 + 1}}{4n^2 - 5n + 1}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + \sqrt{n}}}{n}$

Zadanie 494.

Oblicz granice ciągów o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \sqrt{n - 3} - \sqrt{n + 1}$

b) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

c) $a_n = 2n - \sqrt{3n + n^2}$

d) $a_n = \sqrt[3]{2 + n^3} - n$

e) $a_n = n\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{n^3 - 5n}$

f) $a_n = \sqrt[3]{n^3 - 5n} - \sqrt[3]{n}$

Zadanie 495.

Dany jest ciąg o n -tym wyrazie $a_n = \frac{pn^2 - 12}{(p-1)n^2 + n}$. Wyznacz wartość parametru $p \neq 1$ tak, by granica tego ciągu była równa 3.

Zadanie 496.

Oblicz iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, w którym wyraz pierwszy jest równy 2, a suma wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy kwadratów wyrazów tego ciągu.

5. CIĄGI

Zadanie 497.

Dane są cztery liczby a, b, c, d . Liczby a, b, c w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Liczby b, c, d w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Suma liczb skrajnych jest równa 16, suma środkowych 12. Wyznacz a, b, c i d .

Zadanie 498.

Wykaż, że ciąg o wyrazach: $a_1 = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2}$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 499.

Między liczby 20 i 0,002 wstaw trzy inne tak, by łącznie z danymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny o dodatnim ilorazie.

Zadanie 500.

Bolek i Lolek układają piramidę z kasztanów. W podstawie piramida ma kwadrat ułożony z 36 okrągłych nasion. Liczba nasion w każdym rzędzie kolejnej warstwy jest o 1 mniejsza niż poprzednio. Ile kasztanów potrzebują chłopcy do zbudowania takiej piramidy, by w ostatniej warstwie był jeden kasztan?

Zadanie 501.

Matura 2001 r.

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 12x^2 - 16x - 192$.

- Wyznacz wzór na wyraz ogólny rosnącego nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) , którego trzema początkowymi wyrazami są pierwiastki wielomianu W .
- Oblicz, dla jakich n suma początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest większa od sumy wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (b_n) , gdzie $b_n = 576 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Zadanie 502.

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3. Suma początkowych sześciu wyrazów tego ciągu jest pięć razy większa od sumy trzech początkowych wyrazów ciągu. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu.