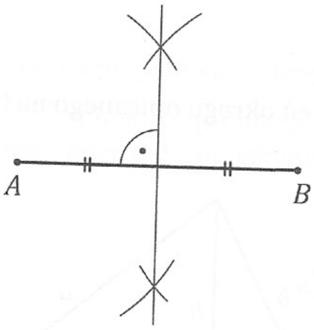
7. Geometria płaska

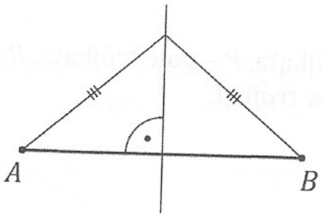
Podstawowe informacje

Trójkąty

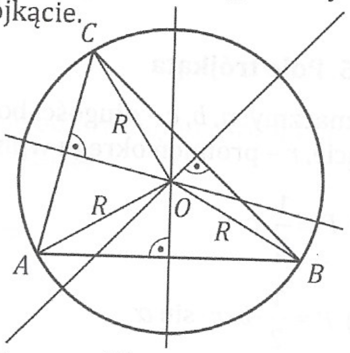
7.1 a) **Symetralna odcinka** jest to prosta prostopadła do odcinka, dzieląca go na dwie równe części.



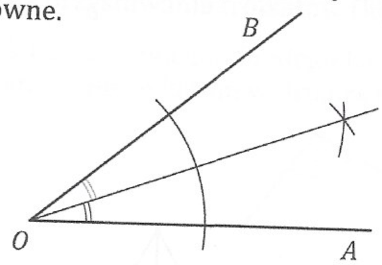
b) Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od końców tego odcinka.



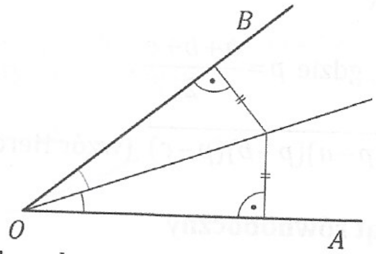
c) Symetralne trzech boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Jest to środek okręgu opisanego na tym trójkącie.



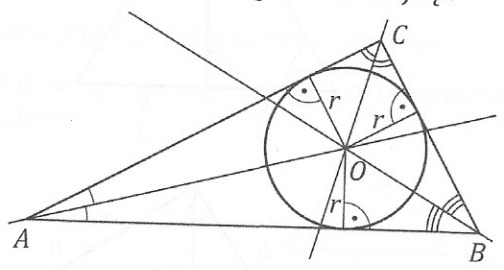
7.2 a) **Dwusieczna kąta** jest to półprosta o początku w wierzchołku kąta, dzieląca kąt na dwa kąty równe.



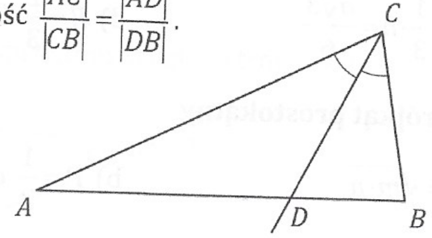
b) Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem punktów kąta równo odległych od ramion tego kąta.



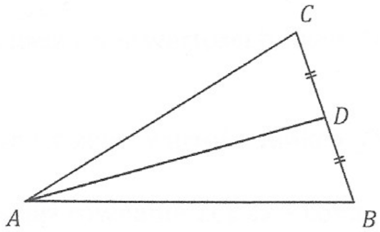
c) Dwusieczne trzech kątów dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Jest to środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.



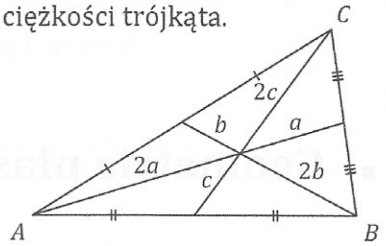
d) W dowolnym trójkącie ABC, w którym półprosta $CD^{\rightarrow}$, $D \in AB$, jest dwusieczną kąta wewnętrznego tego trójkąta, prawdziwa jest równość $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|DB|}$.



7.3 a) **Środkowa trójkąta** jest to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.



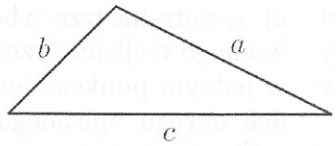
b) W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka trójkąta. Punkt przecięcia środkowych nazywamy środkiem ciężkości trójkąta.



c) Pola sześciu trójkątów, na które środkowe dzielą dany trójkąt, są równe.

7.4. Nierówność trójkąta

W dowolnym trójkącie suma długości dwóch boków jest większa od długości trzeciego boku.



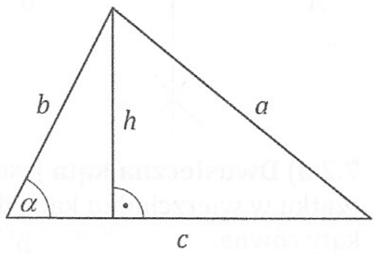
$a < b + c$

$b < a + c$

$c < a + b$

7.5. Pole trójkąta

Oznaczmy: a, b, c – długości boków trójkąta, P – pole trójkąta, R – promień okręgu opisanego na trójkącie, r – promień okręgu wpisanego w trójkąt.



a) $P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$

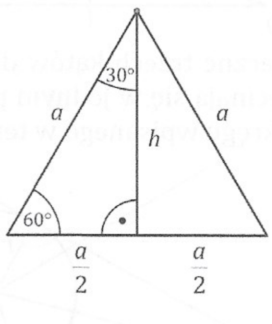
b) $P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

c) $P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$

d) $P = p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

e) $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (wzór Herona)

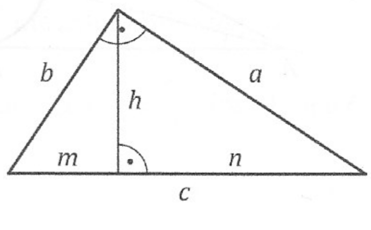
7.6 Trójkąt równoboczny



a) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

c) $r = \frac{1}{3} \cdot h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ d) $R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

7.7 Trójkąt prostokątny



a) $h = \sqrt{m \cdot n}$ b) $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

c) $r = \frac{a+b-c}{2}$ d) $R = \frac{1}{2} c$

7.8. Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych a i b jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej c, czyli $a^2+b^2=c^2$.

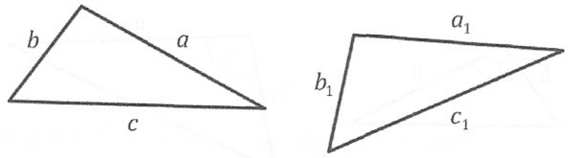
7.9. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli długości a, b, c boków trójkąta spełniają zależność $a^2+b^2=c^2$, to ten trójkąt jest prostokątny, przy czym boki długości a, b są przyprostokątnymi tego trójkąta, a bok długości c – przeciwprostokątną tego trójkąta.

7.10 Cechy przystawania trójkątów

a) I cecha przystawania trójkątów (bbb).

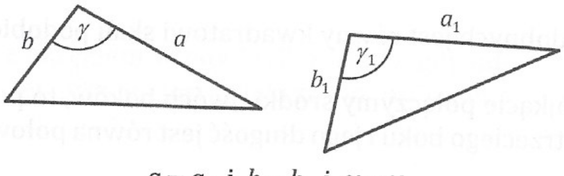
Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



$$a=a_1 \text{ i } b=b_1 \text{ i } c=c_1.$$

b) II cecha przystawania trójkątów (bkb).

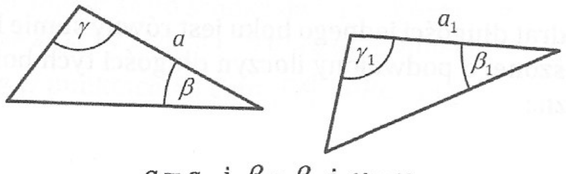
Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są równe odpowiednio dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



$$a=a_1 \text{ i } b=b_1 \text{ i } \gamma=\gamma_1.$$

c) III cecha przystawania trójkątów (kbk).

Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

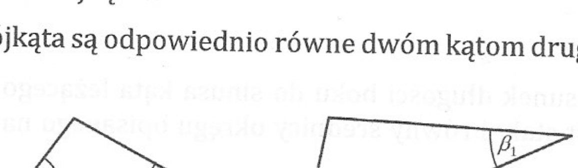


$$a=a_1 \text{ i } \beta=\beta_1 \text{ i } \gamma=\gamma_1.$$

7.11 Cechy podobieństwa trójkątów

a) cecha (kkk) podobieństwa trójkątów

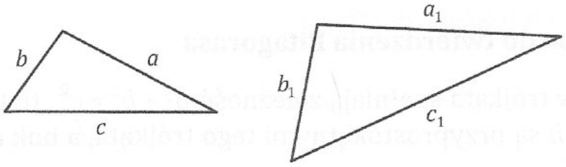
Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



$$\alpha=\alpha_1 \text{ i } \beta=\beta_1.$$

b) Cecha (bbb) podobieństwa trójkątów

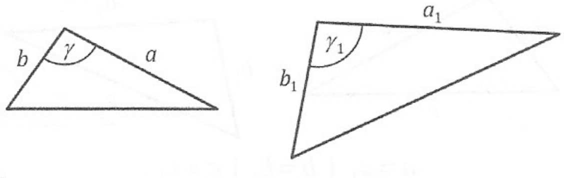
Jeżeli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k\text{, gdzie } k \text{ - skala podobieństwa, } k>0.$$

c) Cecha (kbk) podobieństwa trójkątów

Jeżeli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to te trójkąty są podobne.

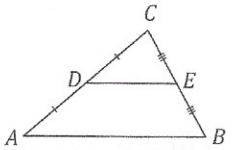


$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=k \text{ i } \gamma=\gamma_1\text{, gdzie } k \text{ - skala podobieństwa, } k>0.$$

7.12 Jeżeli trójkąt T_1 (o polu P_{T_1}) jest podobny do trójkąta T (o polu P_T) w skali k, to $\frac{P_{T_1}}{P_T}=k^2$

(stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa).

7.13 Jeżeli w dowolnym trójkącie połączymy środki dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.



$$DE \parallel AB \text{ i } |DE|=\frac{1}{2}|AB|$$

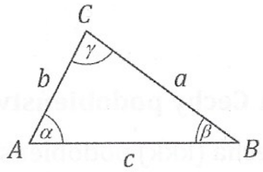
7.14 Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między tymi bokami, tzn.:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$

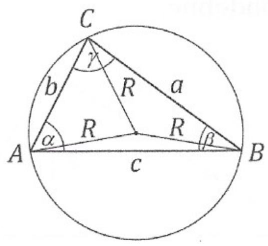
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$



7.15 Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie, tzn.:



$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

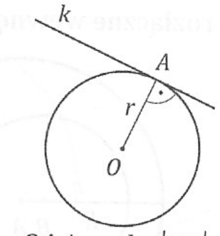
gdzie R – promień okręgu opisanego na trójkącie

Okręgi, koła, proste

7.16. Styczna do okręgu

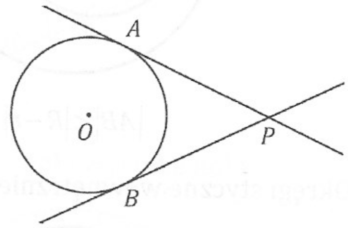
a) Prosta jest styczna do okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do tej prostej.

b) Prosta jest styczna do okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi tego okręgu.



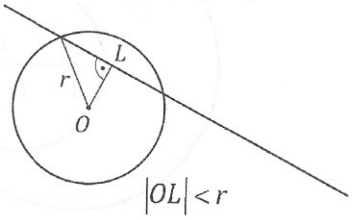
$OA \perp \text{pr.}k$, $|OA| = r$

c) **Twierdzenie o odcinkach stycznych**
Odcinki dwóch stycznych, poprowadzonych do okręgu z punktu, którego odległość od środka okręgu jest większa od promienia tego okręgu – wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności – są równej długości.



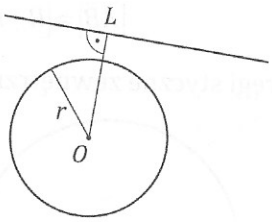
A, B – punkty styczności
$|PA| = |PB|$

7.17. Prosta jest sieczną okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest mniejsza od promienia okręgu.



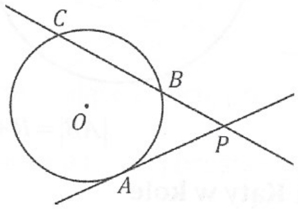
$|OL| < r$

7.18. Prosta jest rozłączna z okręgiem wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od promienia okręgu.

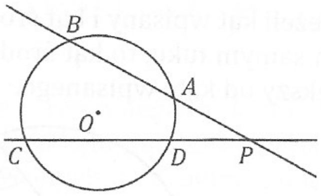


$|OL| > r$

7.19 a) **Twierdzenie o stycznej i siecznej**
Jeżeli przez punkt P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i sieczną przecinającą okrąg w punktach B i C, to $|PA|^2 = |PB| \cdot |PC|$.

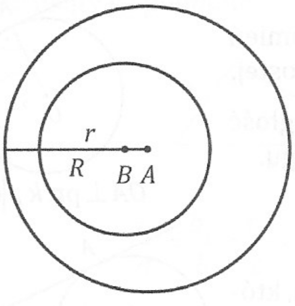


b) **Twierdzenie o siecznych**
Jeżeli dwie proste przecinają okrąg w punktach A i B oraz C i D, a także przecinają się w punkcie P, nie należącym do danego okręgu, to $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.



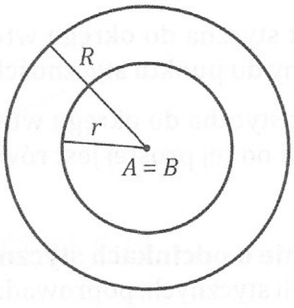
7.20. Wzajemne położenie dwóch okręgów

a) Okręgi rozłączne wewnętrznie



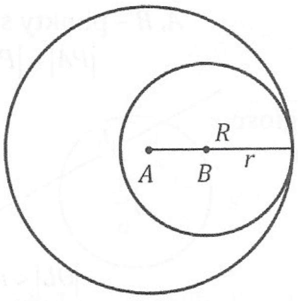
$|AB| < |R - r|$

b) Okręgi współśrodkowe



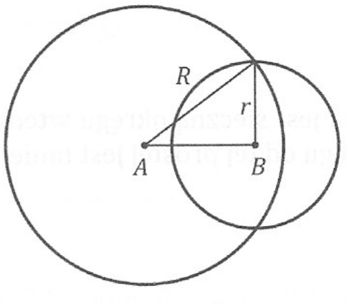
$|AB| = 0, \ r \neq R$

c) Okręgi styczne wewnętrznie



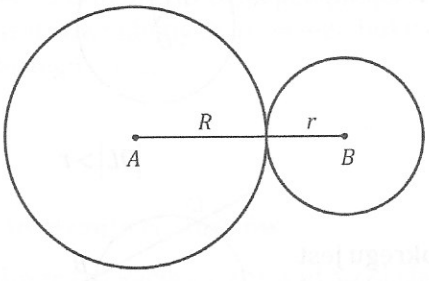
$|AB| = |R - r| \neq 0$

d) Okręgi przecinające się



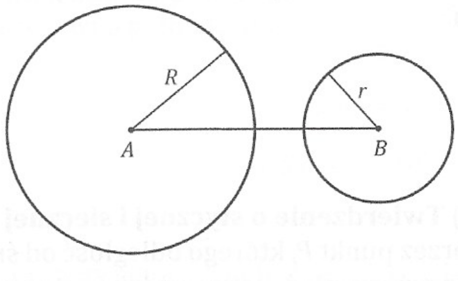
$|R - r| < |AB| < R + r$

e) Okręgi styczne zewnętrznie



$|AB| = R + r$

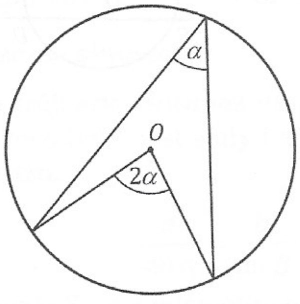
f) Okręgi rozłączne zewnętrznie



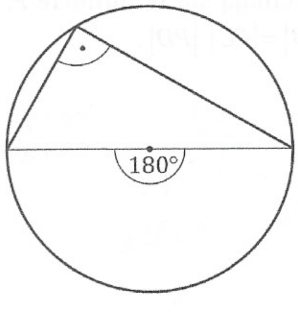
$|AB| > R + r$

7.21 Kąty w kole

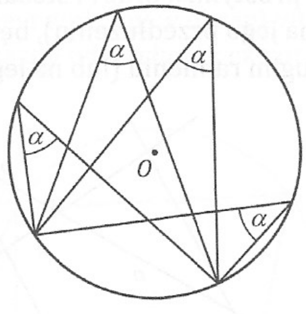
a) Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy są oparte na tym samym łuku, to kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.



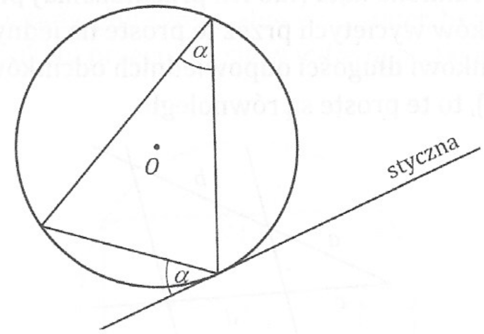
b) Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.



c) Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

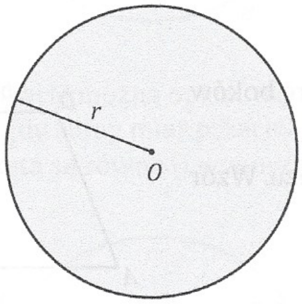


d) Kąt dopisany i kąt wpisany, oparte na tym samym łuku są równe.

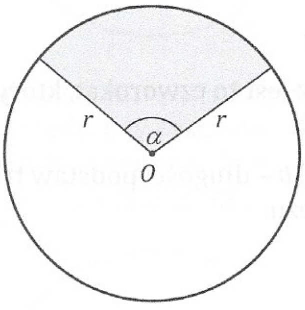


7.22 Długość okręgu, pole koła, pole wycinka koła

Oznaczmy: r – promień okręgu, L – długość okręgu, P – pole koła, P_w – pole wycinka koła.



$L = 2\pi r$, $P = \pi r^2$



$$P_w = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

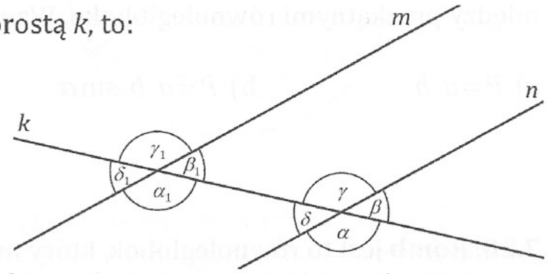
7.23. Twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą

Jeżeli dwie proste równoległe m i n są przecięte trzecią prostą k, to:

– kąty odpowiadające są równe:
tzn. $\alpha_1 = \alpha$ oraz $\delta_1 = \delta$ oraz $\gamma_1 = \gamma$ oraz $\beta_1 = \beta$

– kąty naprzemianległe zewnętrzne są równe:
tzn. $\delta_1 = \beta$ oraz $\gamma_1 = \alpha$

– kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe:
tzn. $\beta_1 = \delta$ oraz $\alpha_1 = \gamma$



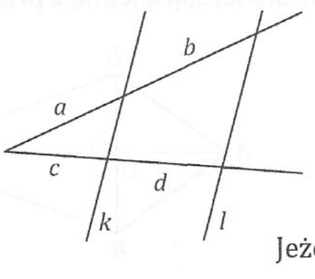
a) Jeżeli kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe, to dwie proste przecinające trzecią prostą są równoległe.

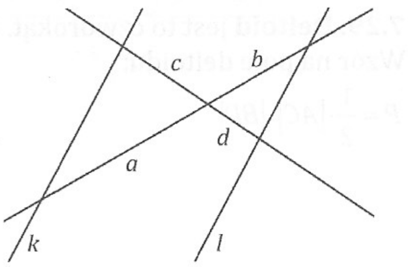
b) Jeżeli kąty naprzemianległe zewnętrzne są równe, to dwie proste przecięte trzecią prostą są równoległe.

c) Jeżeli kąty odpowiadające są równe, to dwie proste przecięte trzecią prostą są równoległe.

7.24 Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przetniemy dwiema prostymi równoległymi k oraz l, to stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na jednym ramieniu kąta (lub na ich przedłużeniu) będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na drugim ramieniu kąta (lub na jego przedłużeniu).

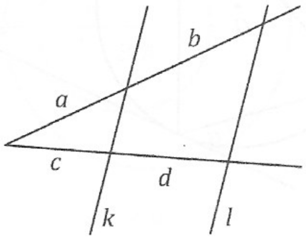


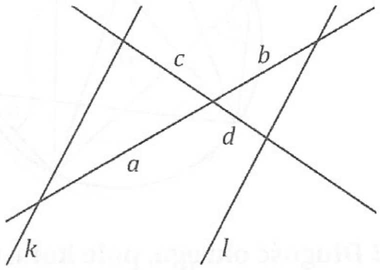


Jeżeli $k \parallel l$, to $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ i $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

7.25. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli ramiona kąta (lub ich przedłużenia) przetniemy dwiema prostymi k oraz l i stosunek długości odcinków wyciętych przez te proste na jednym ramieniu (lub na jego przedłużeniu), będzie równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyciętych na drugim ramieniu (lub na jego przedłużeniu), to te proste są równoległe.





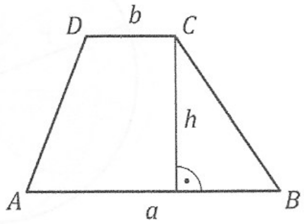
$$\text{Jeżeli } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ lub } \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\text{, to } k\,||\,l$$

Czworokąty

7.26. Trapez jest to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Oznaczmy: a, b – długości podstaw trapezu, h – wysokość trapezu. Wzór na pole trapezu:

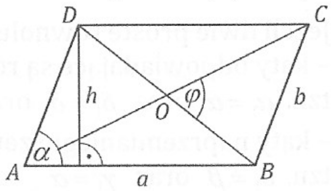
$$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$$



7.27. Równoległobok jest to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych. Przekątne równoległoboku przecinają się w punkcie, który dzieli je na połowy.

Oznaczmy: a, b – długości boków, h – wysokość równoległoboku, α – kąt równoległoboku, φ – kąt między przekątnymi równoległoboku. Wzory na pole równoległoboku:

a) $P=a\cdot h$ b) $P=a\cdot b\cdot \sin\alpha$ c) $P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi$

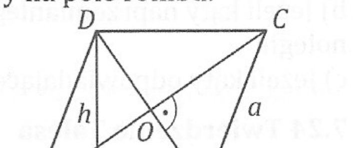


$|AO|=|OC|$ i $|BO|=|OD|$

7.28. Romb jest to równoległobok, który ma wszystkie boki jednakowej długości. Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który dzieli je na połowy.

Oznaczmy: a – długość boku, h – wysokość rombu, α – kąt rombu. Wzory na pole rombu:

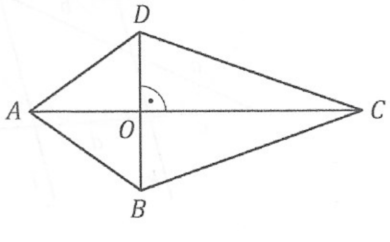
a) $P=a\cdot h$ b) $P=a^2\cdot\sin\alpha$ c) $P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$



$AC\perp BD$, $|AO|=|OC|$ i $|BO|=|OD|$

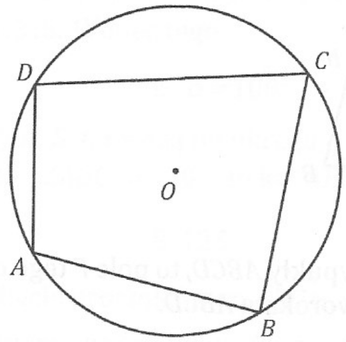
7.29. Deltoid jest to czworokąt, który ma tylko jedną oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych. Wzór na pole deltoidu:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$

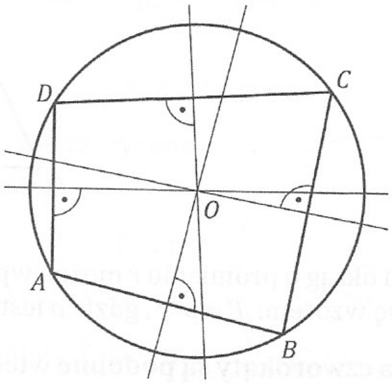


Okrąg opisany na czworokącie

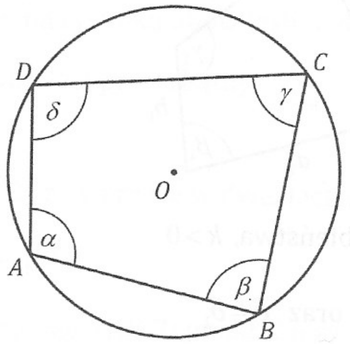
7.30. a) **Okrąg jest opisany na czworokącie** (czworokąt jest wpisany w okrąg) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek czworokąta leży na okręgu.



b) Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich boków czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

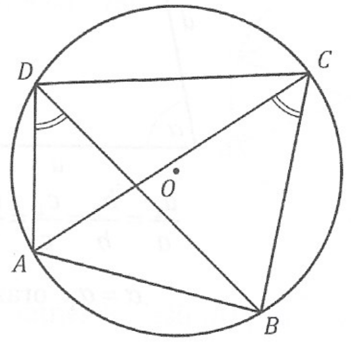


c) Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe (i wynoszą 180°).

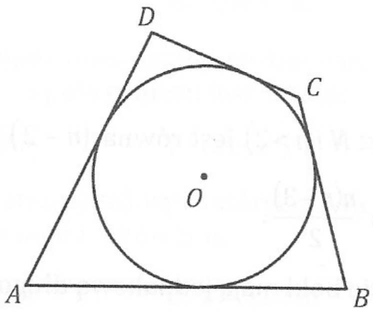


$$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$$

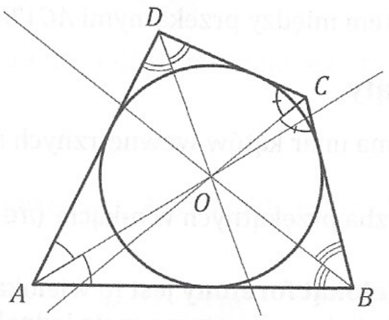
d) Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy przekątne AC i BD czworokąta $ABCD$ tworzą odpowiednio z bokami BC i AD kąty równe ($|\angle ADB|=|\angle ACB|$).



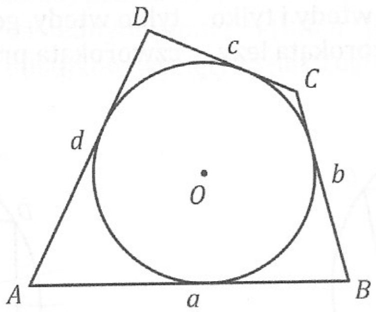
7.31. a) **Okrąg jest wpisany w czworokąt** (czworokąt jest opisany na okręgu) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy bok czworokąta jest styczny do okręgu.



b) Okrąg można wpisać w czworokąt wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów czworokąta wypukłego przecinają się w jednym punkcie.



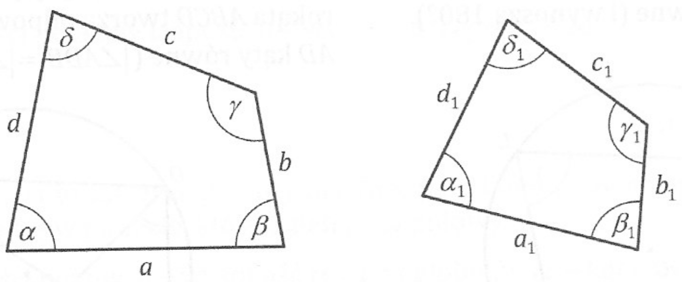
c) Okrąg można wpisać w czworokąt wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków tego czworokąta wypukłego są równe.



$$a+c=b+d$$

7.32. Jeśli okrąg o promieniu r można wpisać w czworokąt wypukły $ABCD$, to pole P tego czworokąta wyraża się wzorem: $P=p\cdot r$, gdzie p jest połową obwodu czworokąta $ABCD$.

7.33. Dwa **czworokąty są podobne** wtedy i tylko wtedy, gdy długości boków w jednym czworokącie są proporcjonalne do odpowiednich długości boków w drugim czworokącie i wszystkie kąty w jednym czworokącie są równe odpowiednim kątom w drugim czworokącie.



$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=\frac{d_1}{d}=k\text{, } k \text{ – skala podobieństwa, } k>0$$

$$\alpha=\alpha_1 \text{ oraz } \beta=\beta_1 \text{ oraz } \gamma=\gamma_1 \text{ oraz } \delta=\delta_1$$

7.34 Jeżeli czworokąt F_1 (o polu P_{F_1}) jest podobna do czworokąta F (o polu P_F) w skali k, to $\frac{P_{F_1}}{P_F}=k^2$ (stosunek pól czworokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa).

7.35. Pole P dowolnego czworokąta wypukłego $ABCD$ wyraża się wzorem: $P=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi$, gdzie φ jest kątem między przekątnymi AC i BD.

Wielokąty

7.36. Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego $(n\in \boldsymbol{N} \; i \; n>2)$ jest równa $(n-2)\cdot 180°$.

7.37. Liczba przekątnych w n-kącie $(n\in \boldsymbol{N} \; i \; n>2)$ jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

7.38. **Wielokąt foremny** jest to wielokąt, w którym wszystkie boki mają jednakową długość i wszystkie kąty wewnętrzne mają jednakowe miary.