Zadanie 673.
Matura próbna I 2006 r., 4 p.

Rozwiąż równanie $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.

Zadanie 674.
Matura próbna I 2005 r., 6 p.

Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania $\sin 3x = \operatorname{ctg} \frac{25}{2}\pi$, które spełniają nierówność $|x - 5\pi| \le 5\pi$.

Zadanie 675.
Matura próbna XII 2005 r., 7 p.

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1)\cdot(\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in R$ jest parametrem.

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0; 5\rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$ trzy różne rozwiązania.

Zadanie 676.

Rozwiąż graficznie nierówność $-1 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Zadanie 677.

Rozwiąż nierówność $4\cos^3 x - \cos x > 0$ w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Zadanie 678.

Rozwiąż nierówność $2\sin x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x > 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

Zadanie 679.
Egzamin wstępny 2002 r.

Rozwiąż nierówność $\sin^4 x > \cos^4 x$.

7. PLANIMETRIA

Zadania zamknięte

ABCD Zadanie 680.

Liczby $2\sqrt{3}$ i $3\sqrt{2}$ są długościami dwóch boków trójkąta. Trzeci bok tego trójkąta może mieć długość:

A. $5\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{6}$

ABCD Zadanie 681.

Pole trójkąta o bokach długości 4, 4, 6 jest równe:

A. $3\sqrt{7}$ B. $3\sqrt{6}$ C. 7 D. 8

ABCD Zadanie 682.

Obwód trójkąta wyznaczonego przez środki trzech okręgów stycznych zewnętrznie, o promieniach 3, 4, 5, wynosi:

A. 12 B. 24π C. 24 D. 12π

ABCD Zadanie 683.

Dwa okręgi o promieniach długości 3 i 4 mają dwa punkty wspólne. Odległość ich środków może być równa:

A. 7 B. 1 C. 5 D. 8

ABCD Zadanie 684.

W trójkącie długości dwóch boków są równe 6 i 8, a kąt między nimi jest prosty. Pole tego trójkąta wynosi:

A. 48 B. 12 C. 14 D. 24

ABCD Zadanie 685.

W trójkącie długości dwóch boków są równe 6 i 8, a kąt między nimi ma miarę $\frac{\pi}{3}$. Pole tego trójkąta wynosi:

A. $12\sqrt{3}$ B. 12 C. $24\sqrt{3}$ D. $12\sqrt{2}$

ABCD **Zadanie 686.**

Wskaż zdanie prawdziwe:

A. Symetralne boków trójkąta nie przecinają się wewnątrz tego trójkąta.
B. Symetralne boków trójkąta mogą się przecinać na zewnątrz tego trójkąta.
C. Symetralne boków trójkąta mogą się przecinać na jednym z boków tego trójkąta.
D. Symetralne boków trójkąta nie przecinają się w jednym z wierzchołków tego trójkąta.

ABCD **Zadanie 687.**

Pole największego trójkąta zawartego w kwadracie o boku 2 wynosi:

A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

ABCD **Zadanie 688.**

Średnica okręgu opisanego na trójkącie o bokach długości 3, 4, 5 jest równa:

A. $\sqrt{5}$ B. 4 C. 6 D. 5

ABCD **Zadanie 689.**

W trójkącie ABC bok AC jest trzy razy dłuższy od podstawy AB. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w takim punkcie D, że:

A. $\frac{|CD|}{|BD|}=\frac{3}{2}$ B. $\frac{|CB|}{|CD|}=\frac{1}{3}$ C. $\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{1}{2}$ D. $\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{1}{4}$

ABCD **Zadanie 690.**

W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych wynoszą 8 i 6. Stosunek długości odcinków, na które wysokość podzieliła przeciwprostokątną, wynosi:

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3^2}{4^2}$ D. $\frac{2^2}{3^2}$

ABCD **Zadanie 691.**

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 4, jedna przyprostokątna ma długość 3. Długość drugiej przyprostokątnej jest równa:

A. 5 B. $\sqrt{7}$ C. 3 D. $2+\sqrt{3}$

ABCD **Zadanie 692.**

W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa m, a długość przeciwprostokątnej n. Pole tego trójkąta wynosi:

A. $\frac{m^2-n^2}{4}$ B. $\frac{m^2+n^2}{4}$ C. $\frac{(m-n)^2}{4}$ D. $\frac{(m+n)^2}{4}$

ABCD **Zadanie 693.**

Kąt ostry rombu ma miarę 30°, promień okręgu wpisanego w ten romb ma długość 1. Pole rombu jest równe:

A. 4 B. 0,5 C. 8 D. 2

ABCD **Zadanie 694.**

Długość jednej z przekątnych rombu jest równa długości boku i wynosi 3. Długość drugiej przekątnej jest równa:

A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 6 D. $3\sqrt{2}$

ABCD **Zadanie 695.**

Długość jednej z przekątnych rombu jest równa długości boku i wynosi 3. Pole tego rombu jest równe:

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

ABCD **Zadanie 696.**

Pole rombu o boku długości 4 i przekątnej 6 jest równe:

A. 16 B. 18 C. $6\sqrt{7}$ D. 12

ABCD **Zadanie 697.**

Pole trapezu jest równe 12, długość wysokości jest równa 2. Długości podstaw tego trapezu mogą być równe:

A. 3 i 6 B. 10 i 4 C. 8 i 5 D. 8 i 4

ABCD **Zadanie 698.**

Tyle samo przekątnych co boków ma

A. czworokąt,
B. pięciokąt,
C. sześciokąt,
D. dowolny n-kąt ($n>6$).

ABCD *Zadanie 699.*

Na płaszczyźnie jest 5 punktów. Przez każde dwa z nich prowadzimy prostą. Można w ten sposób otrzymać co najwyżej n prostych. n jest więc równe:

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

ABCD *Zadanie 700.*

Boki prostokąta zmniejszono o 10% każdy. Pole prostokąta zmniejszyło się o:

A. 10% B. 20% C. 15% D. 19%

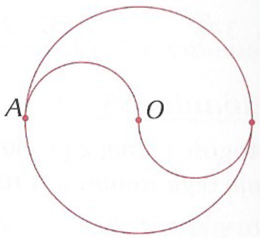
ABCD *Zadanie 701.*

Jeden bok prostokąta zwiększono o 30%, a drugi zmniejszono o 30%. Pole prostokąta o zmienionych bokach:

A. wzrosło o 9%
B. nie zmieniło się
C. zmalało o 9%
D. wzrosło o 15%

ABCD *Zadanie 702.*

W kole narysowane są dwa półokręgi (patrz rysunek).
Stosunek pól figur, na które zostało podzielone pole koła jest równy:

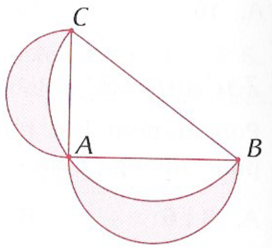


A. $\frac{1}{\pi}$ B. 1 C. $\frac{\pi}{1}$ D. $\frac{2}{3}$

Zadania kodowane

Zadanie 703.

Długości boków trójkąta prostokątnego wynoszą 3, 4, 5. Na bokach tych jako na średnicach opisano półokręgi. Oblicz pole figury będącej sumą księżyców Hipokratesa (obszar zaznaczony na rysunku). Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).



Zadanie 704.

Promień koła opisanego na trójkącie równobocznym o boku długości a ma długość 3. Oblicz a. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

Zadanie 705.

Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 6. Kąt między nimi ma miarę 60°. Oblicz długość trzeciego boku. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

Zadanie 706.

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|\angle BCA| = 30°$, $|\angle ABC| = 50°$. Oblicz długość boku AC. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

Zadanie 707.

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|\angle BCA| = 30°$. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

Zadanie 708.

Obwód rombu jest równy 12, a suma przekątnych 8. Oblicz pole tego rombu. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

Zadanie 709.

Trapez równoramienny o podstawach długości 6 i 7 jest opisany na okręgu. Oblicz pole tego trapezu. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i części dziesiętnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

Zadanie 710.

W trapezie o podstawach długości 8 i 5 suma kątów przy podstawie jest równa $\frac{\pi}{2}$. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

Zadanie 711.

Długości podstaw trapezu równoramiennego wynoszą 10 i 6, kąt ostry przy podstawie ma miarę $\frac{\pi}{4}$. Oblicz pole tego trapezu. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i części dziesiętnych otrzymanego wyniku).

Zadanie 712.

Przekątne trapezu równoramiennego o podstawach długości 8 i 4 są prostopadłe. Oblicz pole tego trapezu. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i części dziesiętnych otrzymanego wyniku).

Zadanie 713.

W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) dane są: $|AB| = 6$, $|CD| = 4$, $|BC| = 7$. Proste zawierające ramiona AD i BC przecinają się w punkcie P. Oblicz długość odcinka CP. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i części dziesiętnych otrzymanego wyniku).

Zadania otwarte

Zadanie 714.

Punkty $ABCD$ dzielą okrąg na cztery części w stosunku 2:3:7:6. Oblicz kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$ powstałego przez połączenie tych punktów okręgu.

Zadanie 715.

Wewnątrz trójkąta ABC obrano dowolny punkt P. Oblicz odległość punktu P od wierzchołka A, wiedząc, że miara kąta BAC jest równa 60°, a odległość punktu P od ramion kąta wynosi: m – od ramienia AB, n – od ramienia AC.

Inne sformułowanie tego zadania:

Wewnątrz trójkąta ABC obrano dowolny punkt P. Odległość punktu P od ramion kąta wynosi: m – od ramienia AB, n – od ramienia AC. Wiedząc, że miara kąta BAC jest równa 60°, uzasadnij, że odległość punktu P od wierzchołka A jest równa $\frac{2\sqrt{3(n^2+mn+m^2)}}{3}$.

Zadanie 716.

Oblicz wysokość trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$) poprowadzoną z wierzchołka C, wiedząc, że trójkąt jest wpisany w okrąg o promieniu 2, a jego pole jest równe $3\sqrt{3}$.

Zadanie 717.

Oblicz pole trójkąta ABC, mając daną długość a boku AB oraz miary dwóch kątów α i β przyległych do tego boku.

Zadanie 718.

Prosta nachylona do jednego z boków trójkąta równobocznego pod kątem ostrym α dzieli pole tego trójkąta w stosunku 1:7. Oblicz miarę kąta α, jeżeli jego wierzchołek jest jednocześnie środkiem boku trójkąta.

Zadanie 719.

W trójkącie prostokątnym długości rzutów prostokątnych przyprostokątnych na przeciwprostokątną są równe m i n. Oblicz pole tego trójkąta.

Inne sformułowanie tego zadania

W trójkącie prostokątnym długości rzutów prostokątnych przyprostokątnych na przeciwprostokątną są równe m i n. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{(m+n)\sqrt{m \cdot n}}{2}$.

Zadanie 720.

Matura próbna I 2005 r., 4 p.

W trójkącie ABC, o kącie rozwartym przy wierzchołku C, dane są długości boków $|AC| = 5$ cm i $|BC| = 12$ cm. Oblicz długość boku AB, wiedząc, że pole trójkąta jest równe 24 cm^2.

Zadanie 721.

Matura V 2008 r., 4 p.

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC| = 9$, $|CA| = 12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD.

Zadanie 722.

Matura V 2007 r., 3 p.

Dany jest trójkąt o bokach długości 1, $\frac{3}{2}$, 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

Zadanie 723.

Matura próbna XII 2004 r., 4 p.

W trójkącie ABC, którego pole równa się 16, boki AC i BC mają długości: $|AC| = 5$, $|BC| = 8$. Korzystając z twierdzenia cosinusów, oblicz długość boku AB.

Zadanie 724.

Matura V 2011 r., 4 p.

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\angle BAC| = 30°$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

Zadanie 725.

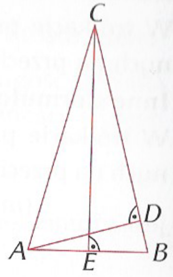
Matura V 2013 r., 5 p.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD|:|DB| = 3:4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

Zadanie 726.

Matura próbna III 2008 r., 5 p.

W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$, wysokość CE jest dwa razy dłuższa od wysokości AD. Oblicz cosinusy wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta ABC.



Zadanie 727.

W trójkąt prostokątny wpisano kwadrat tak, że wierzchołek kąta prostego trójkąta jest jednocześnie jednym z wierzchołków kwadratu. Wykaż, że długość boku x kwadratu jest równa $\frac{ab}{a+b}$, gdzie a, b oznaczają długości przyprostokątnych w tym trójkącie.

Zadanie 728.

W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość a i jest dwa razy krótsza od każdego z boków. Oblicz stosunek pól figur, na jakie dzieli ten trójkąt symetralna jednego z ramion.

Inne sformułowanie tego zadania

W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość a i jest dwa razy krótsza od każdego z boków. Uzasadnij, że stosunek pól figur, na jakie dzieli ten trójkąt symetralna jednego z ramion, jest równy 2:5.

Zadanie 729.

Matura 1996 r.

W trójkącie długości boków są równe: $a, \frac{3}{2}a, a+1$.

a) Dla $a = 4$ oblicz długość najkrótszej środkowej tego trójkąta oraz wyznacz stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykaż, że suma kwadratów sinusów kątów wewnętrznych tego trójkąta jest większa od 2.

b) Dobierz a tak, aby jeden z kątów tego trójkąta miał miarę 60°.

Zadanie 730.

Trójkąt ABC podzielono prostą równoległą do podstawy AB na dwie figury o równych polach. Oblicz, w jakim stosunku ta prosta podzieliła ramiona trójkąta.

Inne sformułowanie tego zadania

Trójkąt ABC podzielono prostą DE równoległą do podstawy AB na dwie figury o równych polach. Uzasadnij, że jeżeli punkt E należy do boku AC, to $\frac{|AE|}{|EC|} = \sqrt{2} - 1$.

Zadanie 731.

Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego ABC ma miarę 2α. Odcinek DE jest równoległy do podstawy AB. Oblicz długość DE, jeśli $|AD| + |BE| = |DE|$.

Dla jakiej wartości kąta α długość DE jest równa $\frac{2}{3}c$ $(c = |AB|)$.

Zadanie 732.

W trójkącie ABC, którego podstawa AB ma długość a poprowadzono prostą równoległą do podstawy, przecinającą ramiona trójkąta w punktach K i L. Oblicz długość KL, wiedząc, że $\frac{|KC|}{|AK|} = m$.

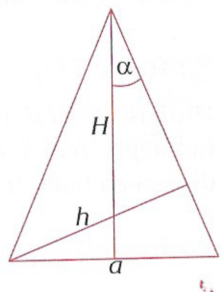
Inne sformułowanie tego zadania

W trójkącie ABC, którego podstawa AB ma długość a, poprowadzono prostą równoległą do podstawy, przecinającą ramiona trójkąta w punktach K i L. Uzasadnij, że jeżeli $\frac{|KC|}{|AK|} = m$, to $|KL| = \frac{am}{m+1}$.

Zadanie 733.

Matura próbna III 2008 r., 6 p.

W trójkącie równoramiennym długość podstawy wynosi a, zaś długości wysokości opuszczonych odpowiednio na podstawę i ramię są równe H i h. Kąt między ramieniem trójkąta i wysokością opuszczoną na podstawę ma miarę α.



a) Wyraź $\operatorname{tg}\alpha$ w zależności od wielkości a i H.

b) Wyraź $\cos\alpha$ w zależności od wielkości a i h.

c) Wykaż, że jeśli $a^2 = H \cdot h$, to $\sin\alpha = \sqrt{2} - 1$.

Zadanie 734.

W trójkącie ABC, którego boki mają długości a, b, c, poprowadzono dwusieczną AD kąta wewnętrznego A. Oblicz długości odcinków BD i CD.

Inne sformułowanie tego zadania

W trójkącie ABC, którego boki mają długości a, b, c, poprowadzono dwusieczną AD kąta wewnętrznego A. Uzasadnij, że $|BD| = \frac{ac}{b+c}$, $|DC| = \frac{ab}{b+c}$.

Zadanie 735.

Dany jest trójkąt ABC o obwodzie równym 80. Dwusieczna kąta wewnętrznego A dzieli bok BC na odcinki $|BD| = 8$ i $|DC| = 12$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zadanie 736.

Oblicz długość boku AC oraz miarę kąta przy wierzchołku A trójkąta ABC, mając dane długości boków $|AB| = 8$ i $|BC| = 16$ oraz $|\angle B| = 60°$.

Zadanie 737.

Suma długości boków MN i NP trójkąta MNP jest równa 10. Oblicz długości tych boków, wiedząc, że miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku M jest równa 30°, a miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku P jest równa 45°.

Zadanie 738.

W trójkącie ABC dane są długości boków a i b. Oblicz długość trzeciego boku, jeśli wiadomo, że kąt C jest dwa razy większy od kąta B.

Inne sformułowanie tego zadania

W trójkącie ABC dane są długości boków a i b. Uzasadnij, że długość trzeciego boku $c = \sqrt{b(a+b)}$, jeśli wiadomo, że kąt C jest dwa razy większy od kąta B.

Zadanie 739.

Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego. Jeden z kątów ma miarę 120°. Oblicz stosunek długości najdłuższego boku tego trójkąta do długości boku najkrótszego.

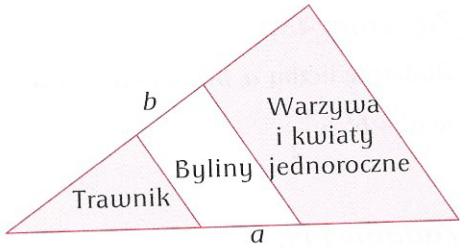
Zadanie 740.

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano trójkąt równoboczny ABD, którego pole jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

Zadanie 741.

Na bokach AB, BC i CA wyznaczono odpowiednio punkty K, L, M, takie że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|} = k$. Pole trójkąta KLM jest równe 0,28 pola trójkąta ABC. Wyznacz k.

Zadanie 742.



Architekt krajobrazu projektuje ogród w kształcie trójkąta. Trawnik, również w kształcie trójkąta, usytuowany w jednym z rogów działki, ma zajmować $\frac{1}{9}$ powierzchni ogrodu. Na byliny właściciel chce przeznaczyć $\frac{1}{3}$ powierzchni, a pozostałą część ogrodu zajmą rośliny jednoroczne i warzywa. Dwa boki działki mają długości a i b. Ścieżki oddzielające poszczególne części ogrodu mają być poprowadzone równolegle do trzeciego boku działki (patrz rysunek). Zaproponuj taki podział działki, by sprostać założeniom architekta.

Zadanie 743.

W trójkącie ABC poprowadzono przez punkt A prostopadłą do boku AB, a przez punkt C prostopadłą do boku BC. Obie proste przecinają się w punkcie D. Wykaż, że punkty B i D są równo oddalone od symetralnej boku AC tego trójkąta.

Zadanie 744.

Matura przed 1999 r.

Wykaż, że w każdym trójkącie o bokach długości a, b, c zachodzi zależność $\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{2} > \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Zadanie 745.

Matura 1996 r.

Punkt M leży wewnątrz trójkąta ABC. Odległości tego punktu od boków trójkąta są równe x, y i z, a długości odpowiednich wysokości trójkąta są równe h_a, h_b, h_c. Dowiedź, że $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$.

Zadanie 746.

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 747.

Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$. R jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykaż, że $r = R$.

Zadanie 748.

Dodatnie liczby a, b, c są długościami boków dowolnego trójkąta. Wykaż, że $a^2 + b^2 > \frac{c^2}{2}$.

Zadanie 749.

Matura próbna XII 2014 r., 4 p.

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$, to $\cos\gamma < 0$.

Zadanie 750.

Uzasadnij, że jeżeli miary kątów trójkąta są kolejnymi wyrazami niemalejącego ciągu arytmetycznego, a długości boków tego trójkąta tworzą ciąg geometryczny, to trójkąt jest równoboczny.

Zadanie 751.

W kwadracie o boku długości 1 zawarty jest trójkąt. Udowodnij, że pole tego trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

Zadanie 752.

Matura 1996 r.

Przez punkt wewnętrzny P trójkąta ABC poprowadzono proste równoległe do wszystkich boków. Wycięły one trzy trójkąty o polach Q, R, T. S jest polem trójkąta ABC. Udowodnij, że $\sqrt{S} = \sqrt{Q} + \sqrt{R} + \sqrt{T}$.

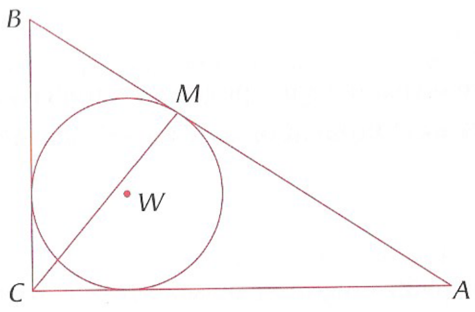
Zadanie 753.

W okrąg o środku O i promieniu długości 10 wpisany jest trójkąt równoramienny. Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że kąt środkowy AOB ma miarę $\frac{2\pi}{3}$ (AB jest podstawą trójkąta).

Zadanie 754.

Informator maturalny.

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|BC| = 30$, $|AC| = 40$, $|AB| = 50$. Punkt W jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie M. Oblicz długość odcinka CM.



Zadanie 755.

Matura próbna XI 2004 r., 5 p.

Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta i oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka tego kąta.

b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 756.

W trójkącie prostokątnym wysokość i środkowa poprowadzone z wierzchołka kąta prostego oraz przeciwprostokątna tworzą (w podanej kolejności) ciąg geometryczny, którego iloczyn wyrazów równa się 8. Oblicz stosunek pola koła opisanego do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

Inne sformułowanie tego zadania

W trójkącie prostokątnym wysokość i środkowa poprowadzone z wierzchołka kąta prostego oraz przeciwprostokątna tworzą (w podanej kolejności) ciąg geometryczny, którego iloczyn wyrazów równa się 8. Uzasadnij, że stosunek pola koła opisanego na trójkącie (S) do pola koła wpisanego w trójkąt (S') jest równy $\frac{S}{S'} = 10 + 4\sqrt{2-\sqrt{3}} + 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Zadanie 757.

Matura 1996 r.

Dwa boki trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg o promieniu R mają długości $\frac{3}{2}R$ oraz $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta w zależności od R, jeśli bok o długości $R\sqrt{3}$ jest najdłuższy.

Zadanie 758.

Dwa boki trójkąta rozwartokątnego wpisanego w okrąg o promieniu R mają długości $\frac{3}{2}R$ oraz $R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku trójkąta w zależności od R.

Zadanie 759.

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC, jeżeli $|AB| = 8$, $|\angle A| = 60°$ oraz $|\angle B| = 45°$. Rozwiąż to samo zadanie dla $|AB| = a$, $|\angle A| = \alpha$ oraz $|\angle B| = \beta$.

Zadanie 760.

Na okręgu o promieniu długości r opisano trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami trójkąta ma miarę 120°. Oblicz pole trójkąta.

Inne sformułowanie tego zadania

Na okręgu o promieniu długości r opisano trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami trójkąta ma miarę 120°. Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe $\frac{r^2(2+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}$.

Zadanie 761.

W kąt o mierze 60° wpisane są dwa koła styczne zewnętrznie o promieniach R_1 i $R_2 (R_1 > R_2)$. Oblicz stosunek pól $\frac{P_1}{P_2}$ $(P_1 > P_2)$ tych kół.

Zadanie 762.

Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą prostopadłą do jednego z ramion i wpisano dwa koła styczne do ramion i do tej prostej. Oblicz stosunek pól tych kół.

Zadanie 763.

Matura 1996 r.

W trójkąt wpisano okrąg o promieniu długości r. Równolegle do boków trójkąta poprowadzono styczne do tego okręgu i w powstałe trójkąty wpisano okręgi o promieniach długości r_1, r_2, r_3.

a) Wykaż, że $r = r_1 + r_2 + r_3$.

b) Wykaż, że jeżeli suma długości wszystkich wysokości trójkąta jest dziewięć razy większa od długości promienia okręgu wpisanego, to trójkąt ten jest równoboczny.

Zadanie 764.

W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano trzy jednakowe okręgi tak, że każdy z nich jest styczny do dwóch pozostałych okręgów oraz do dwóch boków trójkąta. Oblicz długość promienia okręgu.

Zadanie 765.

Matura 1992 r.

Z wierzchołka C kąta prostego w trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD. Udowodnij, że długość wysokości CD jest równa sumie długości promieni okręgów wpisanych w trójkąt ABC, trójkąt ADC i trójkąt DBC.

Zadanie 766.

Na odcinku długości a oraz na jego połowach, jako na średnicach, zakreślono trzy okręgi. Wyznacz promień okręgu stycznego do tych trzech okręgów.

Zadanie 767.

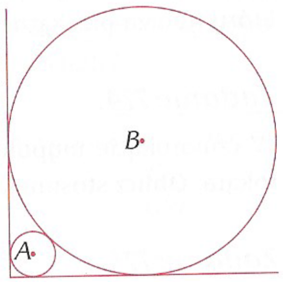
Matura 1996 r.

W kąt o mierze 2α wpisano ciąg kół w taki sposób, że pierwsze koło ma promień długości R i jest styczne do ramion kąta, a każde następne koło ma mniejszy promień i jest styczne do poprzedniego koła oraz do ramion kąta. Znajdź sumę obwodów oraz sumę pól kół tego ciągu.

Zadanie 768.

Matura V 2009 r., 4 p.

Dwa okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego. Udowodnij, że stosunek długości promienia większego z tych okręgów do długości promienia mniejszego okręgu jest równy $3 + 2\sqrt{2}$.



Zadanie 769.

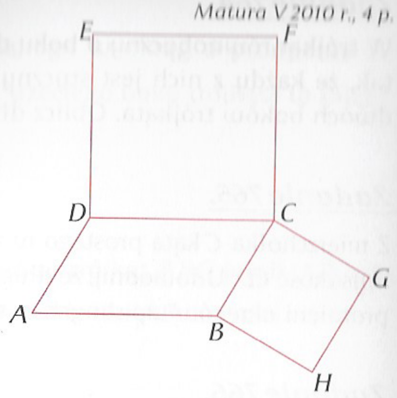
Matura próbna I 2006 r., 4 p.

Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a $(a > 0)$.

Zadanie 770.

Matura V 2010 r., 4 p.

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$. Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.



Zadanie 771.

Dany jest kwadrat o boku długości 3. Z każdego wierzchołka tego kwadratu zakreślono koło o promieniu długości 3. Oblicz pole części wspólnej tych kół.

Zadanie 772.

Udowodnij, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu okręgu opisanego na prostokącie od prostych zawierających boki tego prostokąta jest równa sumie kwadratów długości boków prostokąta.

Zadanie 773.

Matura próbna XII 2014 r., 2 p.

Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5. Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

Zadanie 774.

W czworokącie wypukłym środki boków są wierzchołkami innego czworokąta. Oblicz stosunek pól tych czworokątów.

Zadanie 775.

Matura próbna III 2008 r., 4 p.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AB| = 2, |BC| = \sqrt{3}, |CD| = 3, |DA| = 4$ i $|\angle DAB| = 60°$. Oblicz pole tego czworokąta.

Zadanie 776.

Matura VI 2012 r., 5 p.

W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 24$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$. Ponadto kąty DAB oraz BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnych.

Zadanie 777.

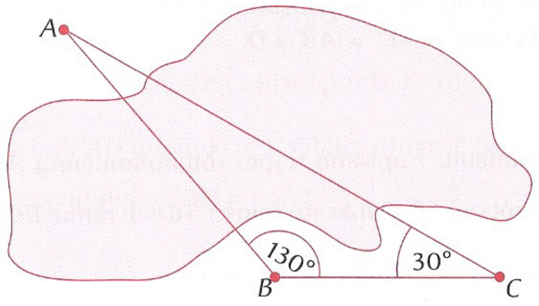
Matura V 2015, 4 p.

Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

Zadanie 778.

Matura V 2006 r., 3 p.

Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



Zadanie 779.

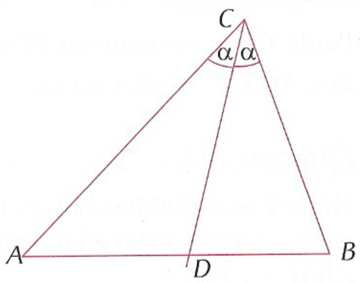
Matura V 2011 r., 3 p.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.

Zadanie 780.

Matura próbna XII 2004 r., 4 p.

Udowodnij twierdzenie o podziale boku trójkąta dwusieczną kąta wewnętrznego: *Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy temu kątowi na odcinki, których długości są proporcjonalne do długości boków przyległych, czyli (stosując oznaczenia jak na rysunku): jeżeli* $|\angle ACD| = |\angle BCD|$, *to* $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$.



W dowodzie posłuż się twierdzeniem Talesa, wcześniej jednak przedłuż odcinek AC do punktu przecięcia się z prostą równoległą do półprostej CD i przechodzącą przez punkt B.

Zadanie 781.

Matura V 2012 r., 5 p.

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD. Wyraź pole trójkąta AED za pomocą a i b.

Zadanie 782.

W czworokącie wypukłym długość odcinka łączącego środki dwóch przeciwległych boków jest równa średniej arytmetycznej długości boków pozostałych. Wykaż, że taki czworokąt jest trapezem.

Zadanie 783.

Matura V 2013 r., 4 p.

Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

Zadanie 784.

Matura V 2006 r., 6 p.

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.

a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.
b) Oblicz cosinus $|\angle CBD|$.

Zadanie 785.

Matura próbna I 2009 r., 6 p.

Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraź pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.

Zadanie 786.

Informator maturalny 2010 r.

Punkt E leży na ramieniu BC trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Udowodnij, że $|\angle AED| = |\angle BAE| + |\angle CDE|$.

Zadanie 787.

Matura próbna XII 2014 r., 3 p.

Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\angle AEF = 90°$. Udowodnij, że $\angle BAE = \angle EAF$.

Zadanie 788.

W trapezie miary kątów wewnętrznych przy podstawie wynoszą 60° i 45°. Różnica kwadratów długości podstaw jest równa 4. Oblicz pole trapezu.

Zadanie 789.

W trapezie o podstawach długości a i b ($a > b$) poprowadzono przekątne. Punkty K i L są środkami tych przekątnych. Oblicz długość KL w zależności od a i b.

Zadanie 790.

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD $|AB| = 2|CD|$. Punkt P jest środkiem jednej z przekątnych. Przez punkt P poprowadzono prostą k równoległą do drugiej przekątnej, której długość jest równa q. Oblicz długość odcinka prostej k zawartego wewnątrz trapezu.

Zadanie 791.

W trapezie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $|AB| = 12$, $|CD| = 7$. Na boku BC obrano punkt K tak, że $\frac{|KC|}{|BK|} = \frac{3}{4}$. Prosta przechodząca przez punkt K i równoległa do podstaw trapezu przecina bok AD w punkcie L. Oblicz długość odcinka KL. Rozwiąż to samo zadanie przyjmując: $|AB| = a$, $|CD| = b$, $\frac{|KC|}{|BK|} = \frac{p}{q}$.

Zadanie 792.

Podstawa trapezu ma długość m, a ramiona i krótsza podstawa są sobie równe. Przedłużenia ramion trapezu przecinają się w punkcie P pod kątem o mierze 2α. Oblicz obwód trapezu.

Zadanie 793.

Ramiona i krótsza podstawa trapezu równoramiennego są długości 1. Przekątne przecinają się pod kątem o mierze 120°. Oblicz pole tego trapezu. Sprawdź, czy pole trapezu jest większe od $2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Zadanie 794.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa AB jest dwa razy dłuższa od podstawy CD. Przekątna AC trapezu zawiera się w dwusiecznej kąta BAD. Oblicz długości boków trapezu, wiedząc, że jego pole jest równe $6\sqrt{3}$.

Zadanie 795.

Na kole opisano trapez, którego jedno ramię o długości 20 tworzy z podstawą kąt o mierze 60°. Drugie ramię tworzy z podstawą kąt o mierze 30°. Oblicz długość krótszej podstawy.

Zadanie 796.

W trapezie opisanym na okręgu dane są długości nierównoległych ramion 26 i 30. Pole trapezu jest równe 672. Oblicz długości podstaw tego trapezu.

Zadanie 797.

Odległości środka okręgu wpisanego w trapez prostokątny od wierzchołków należących do ramienia tworzącego z podstawą kąt ostry są równe 4 i 6. Oblicz pole trapezu.

Zadanie 798.

Matura 1996 r.

W trapezie opisanym na okręgu długości boków nierównoległych wynoszą 3 cm i 5 cm, a odcinek łączący środki tych boków dzieli trapez na dwie figury, których stosunek pól wynosi 5 : 11. Oblicz długości podstaw trapezu.

Zadanie 799.

W trapez prostokątny wpisano okrąg o promieniu długości r. Oblicz pole trapezu, wiedząc, że najkrótszy bok tego czworokąta ma długość równą 150% r.

Zadanie 800.

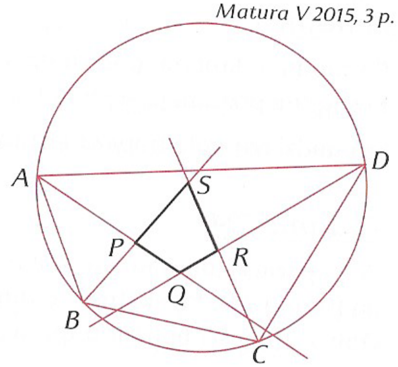
Przez punkt M należący do boku trójkąta poprowadzono proste równoległe do pozostałych boków trójkąta. Powstały w ten sposób równoległobok ma pole równe połowie pola trójkąta. Oblicz, w jakim stosunku punkt M podzielił bok trójkąta.

Zadanie 801.

Matura V 2015, 3 p.

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P, Q, R, S (zobacz rysunek).

Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.



Zadanie 802.

W okrąg o promieniu długości $\sqrt{5}$ jest wpisany czworokąt $ABCD$, w którym $|AB| = |AD|$, miara kąta BCD jest równa 120° i stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta ACD wynosi $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód czworokąta $ABCD$.

Zadanie 803.

Matura V 2007 r., 4 p.

Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

Zadanie 804.

Matura próbna XII 2005 r., 8 p.

Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu długości $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$.

Zadanie 805.

Wykaż, że w czworokącie wypukłym, niebędącym równoległobokiem, środki przekątnych oraz środki dwóch przeciwległych boków są wierzchołkami równoległoboku.

Zadanie 806.

Punkt P jest punktem wewnętrznym równoległoboku. Wykaż, że suma odległości tego punktu P od boków równoległoboku jest wielkością stałą.

Zadanie 807.

Wewnątrz kąta wypukłego ABC dany jest punkt P. Wyznacz na ramieniu BC tego kąta punkt K, którego odległości od punktu P i od półprostej BA są równe.