Zadania zamknięte

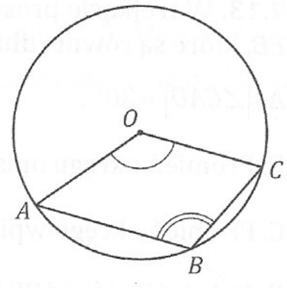
7.1. Wskaż czworokąt, który można wpisać w okrąg:

A. deltoid B. romb C. równoległobok D. trapez równoramienny

7.2. Na czworokącie o kolejnych kątach α, β, γ, δ można opisać okrąg. Wiadomo, że $\alpha:\beta:\gamma=4:3:5$. Wobec tego:

A. $\delta=90°$ B. $\delta=108°$ C. $\delta=120°$ D. $\delta=124°$

7.3. Punkty A, B, C należą do okręgu o środku w punkcie O (zobacz rysunek obok). Jeżeli $|\angle AOC|=130°$, to kąt ABC ma miarę:

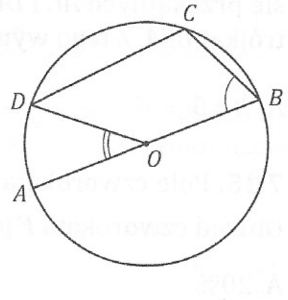


A. 130° B. 125° C. 120° D. 115°

7.4. W trójkącie prostokątnym ABC mamy dane: $|\angle A|=90°$ oraz $|AC|=8$ cm. Jeśli przyjmiemy, że środkowa CD ma długość 10 cm, to promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

A. $6\frac{2}{3}$ cm B. $2\sqrt{13}$ cm C. $\frac{\sqrt{39}}{13}$ cm D. 5 cm

7.5. W okręgu o środku w punkcie O poprowadzono średnicę AB oraz cięciwę CD, jak na rysunku obok. Jeśli $|\angle ABC|=70°$ oraz $|\angle AOD|=40°$, to:



A. trójkąt DOC jest prostokątny

B. $DC \parallel AB$

C. Odcinek CA zawiera się w dwusiecznej kąta BAD

D. $|AB|=\sqrt{2}\cdot|DC|$

7.6. W prostokącie $ABCD$ punkt D leży w odległości 3 od przekątnej AC. Jeśli $|AD|=\sqrt{10}$, to promień okręgu opisanego na prostokącie $ABCD$ jest równy:

A. 3 B. 4. C. 5. D. 6

7.7. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długość 9 cm i 12 cm. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. 3 cm B. $2{,}5\sqrt{3}$ cm C. 5 cm D. 6 cm

7.8. W trapez prostokątny można wpisać okrąg o promieniu r. Jeśli dłuższe ramię tego trapezu ma długość c, to pole trapezu jest równe:

A. $(c+2r)\cdot r$ B. $(c+2r)\cdot c$ C. $2c\cdot r$ D. $(c+r)\cdot 2r$

7.9. Rozpatrzmy trójkąty, których dwa boki mają długość 4 cm i 5 cm. Wśród nich jest trójkąt o największym polu P. Wówczas:

A. $P=20\text{ cm}^2$ B. $P=10\text{ cm}^2$ C. $P=5\sqrt{3}\text{ cm}^2$ D. $P=5\text{ cm}^2$

7.10. W trójkącie prostokątnym ABC długości przyprostokątnych AB i AC pozostają w stosunku 3 : 4. Symetralna boku BC odcina od trójkąta ABC mniejszy trójkąt prostokątny. Jaką część pola danego trójkąta stanowi pole odciętego trójkąta?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{25}{64}$

7.11. W czworokącie wypukłym przekątne długości 8 i 9 przecinają się pod kątem 30°. Pole tego czworokąta jest zatem równe:

A. 18 B. $12\sqrt{3}$ C. $18\sqrt{3}$ D. 24

7.12. W trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy podstawie dzieli przeciwległe ramię na odcinki długości 5 cm i 4 cm, licząc od wierzchołka trójkąta między ramionami. Tak więc podstawa tego trójkąta ma długość:

A. 7,2 cm B. 7,5 cm C. 8 cm D. 8,4 cm

7.13. W trójkącie prostokątnym *ABC* punkty *D* i *E* dzielą przeciwprostokątną *BC* na odcinki *CD*, *DE*, *EB*, które są równej długości. Wybierz zdanie prawdziwe:

A. $|\angle CAD| = 30°$.

B. Promień okręgu opisanego na trójkącie *AEC* jest równy $|AD|$.

C. Promień okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* jest równy $|DE|$.

D. Pola trójkątów *ABE* i *AED* są równe.

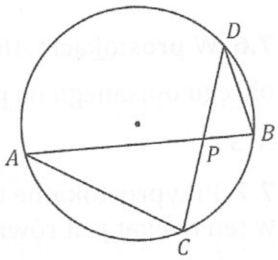
7.14. W trapezie *ABCD* podstawy mają długość: $|AB| = 10$, $|DC| = 2$. Punkt *S* jest punktem przecięcia się przekątnych *AC* i *DB*. Obrazem trójkąta *DSC* w jednokładności o środku w punkcie *S* i skali *k* jest trójkąt *BSA*. Z tego wynika, że:

A. $k=5$ B. $k=-5$ C. $k=\frac{1}{5}$ D. $k=\frac{-1}{5}$

7.15. Pole czworokąta F_1 podobnego do czworokąta *F* jest o 36% mniejsze od pola czworokąta *F*. Obwód czworokąta *F* jest zatem większy od obwodu czworokąta F_1 o:

A. 20% B. 25% C. 36% D. 64%

7.16. W okręgu poprowadzono cięciwy *AB* i *CD*, które przecięły się w punkcie *P* (zobacz rysunek obok). Zakładamy, że $|PC| = |PD|$ oraz $|AP| = 9$, $|PD| = 4$. Wówczas trójkąt *APC* jest podobny do trójkąta *DPB* w skali:



A. 1,5 B. 1,75
C. 2 D. 2,25

Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

7.17. Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O_1 i promieniu 4 oraz okrąg o środku w punkcie O_2 i promieniu *r*, $r > 0$. Przyjmujemy, że $|O_1O_2| = 3$. Wyznacz *r*, wiedząc, że te dwa okręgi mają tylko jeden punkt wspólny.

7.18. Dane są dwa okręgi: o_1 – o środku w punkcie O_1 i promieniu 3 oraz o_2 – o środku w punkcie O_2 i promieniu $4-m$. Przyjmujemy, że $|O_1O_2| = 5$. Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których te okręgi się przecinają.

7.19. W trójkąt równoramienny *ABC*, $|AC| = |BC|$, wpisano okrąg. Punkt *D* jest punktem styczności tego okręgu z ramieniem *BC* i dzieli to ramię na odcinki długości: $|BD| = 5$ cm, $|DC| = 3$ cm. Oblicz $|AD|$. Wynik zaokrąglij do drugiego miejsca po przecinku, a następnie zakoduj cyfrę jedności oraz dwie cyfry po przecinku tego przybliżenia.

7.20. Boki trójkąta mają długość 16, 10, 10. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Zakoduj cyfrę jedności i dwie kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

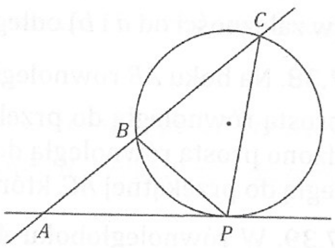
7.21. Dwa boki deltoidu mają długość 12 i 9. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten deltoid, wiedząc, że na tym deltoidzie można również opisać okrąg. Wynik zakoduj, wpisując trzy kolejne cyfry po przecinku jego rozwinięcia dziesiętnego.

7.22. Oblicz pole trapezu, którego podstawy mają długość 23 cm i 2 cm, a ramiona – 10 cm i 17 cm.

7.23. Podstawy trapezu równoramiennego mają długość 6 cm oraz 8 cm, a jego wysokość jest równa 7 cm. Wyznacz promień okręgu opisanego na tym trapezie.

■ **7.24.** Wierzchołki sześciokąta $ABCDEF$ leżą na okręgu. Wykaż, że
$|\angle A|+|\angle C|+|\angle E|=|\angle B|+|\angle D|+|\angle F|=360^\circ$.

■ **7.25.** Z punktu A poprowadzono dwie proste: sieczną okręgu, przecinającą ten okrąg kolejno w punktach B, C, oraz styczną do okręgu w punkcie P – jak na rysunku obok. Wykaż, że jeśli $|AB|=|PB|$, to $|AP|=|PC|$.



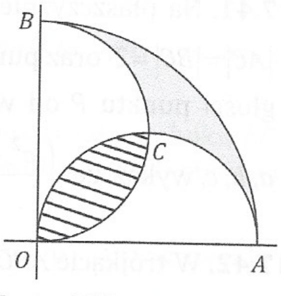
7.26. Balon wzniósł się nad powierzchnię Ziemi na wysokość 5 km. W jakiej największej odległości (od balonu) znajduje się punkt na Ziemi, który można dostrzec z balonu? Wynik podaj z dokładnością do 1 km. (Zakładamy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6370 km).

■ **7.27.** Trójkąt ostrokątny ABC wpisano w okrąg o promieniu R. Kąt przy wierzchołku A ma miarę α. Wykaż, że odległość punktu przecięcia wysokości trójkąta ABC od wierzchołka A jest równa $2R\cos\alpha$.

■ **7.28.** Proste OA i OB są prostopadłe, $|OA|=|OB|$. Zakreślono łuk okręgu o środku w punkcie O i promieniu $|OA|$, przechodzący przez punkty A, B. Następnie zakreślono łuki okręgów, w których odcinki OA i OB są średnicami. Łuki te przecięły się w punkcie C (jak na rysunku obok). Wykaż, że:

a) punkty A, B, C leżą na jednej prostej

b) pole figury szarej jest równe polu figury zakreskowanej.

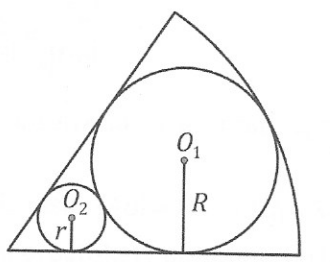


■ **7.29.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie ABC symetralna boku AB i dwusieczna kąta ACB przecinają się w punkcie należącym do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

■ **7.30.** Na okręgu o środku w punkcie O zaznaczono punkt A. Wykaż, że środek dowolnej cięciwy tego okręgu o końcu w punkcie A należy do okręgu, którego średnicą jest odcinek AO.

■ **7.31.** Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku O. Wykaż, że suma kątów wypukłych AOB i COD jest równa 180°.

■ **7.32.** W wycinek koła o kącie środkowym 60° wpisano okrąg o środku O_1 i promieniu R (zobacz rysunek obok). Następnie poprowadzono okrąg o środku O_2 i promieniu r, styczny zewnętrznie do pierwszego okręgu i jednocześnie styczny do ramion kąta tego wycinka. Wykaż, że $R=3r$.

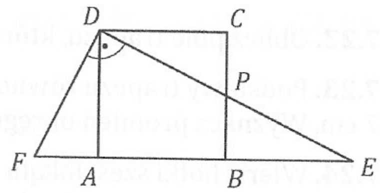


7.33. W trójkącie równoramiennym ABC kąt przy wierzchołu C jest równy 120°. Zakładając, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi $4-2\sqrt{3}$, oblicz pole trójkąta ABC.

7.34. W trapez równoramienny $ABCD$, $AB \parallel CD$ i $|AB|>|DC|$, wpisano okrąg o promieniu 4. Zakładając, że $|DC|=6$, oblicz $|AB|$.

■ **7.35.** W trójkącie prostokątnym ABC, gdzie $|\angle A|=90°$, poprowadzono wysokość AD i środkową AS. Wykaż, że jeśli $|CD|=|DS|$, to kąty ostre trójkąta mają miary 30° i 60°.

■ **7.36.** Dany jest kwadrat $ABCD$, punkt P jest środkiem boku BC. Prosta PD przecina prostą AB w punkcie E. Przez punkt D poprowadzono prostą prostopadłą do prostej DE i przecinającą prostą AB w punkcie F (jak na rysunku obok). Wykaż, że $|FD|=|PE|$.



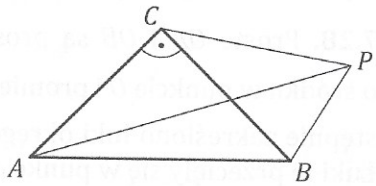
7.37. W czworokącie $ABCD$ mamy dane: $|AD|=|DC|=a$ i $|AB|=|BC|=b$ oraz $|\angle A|=|\angle C|=90°$. Oblicz (w zależności od a i b) odległość punktu C od prostej AB.

■ **7.38.** Na boku AB równoległoboku $ABCD$ leży punkt K, $K \neq A, K \neq B$. Przez ten punkt poprowadzono prostą równoległą do przekątnej AC, która przecięła bok BC w punkcie L. Przez punkt L poprowadzono prostą równoległą do przekątnej BD, która przecięła bok CD w punkcie M, a przez M – równoległą do przekątnej AC, która przecięła bok AD w punkcie N. Wykaż, że $KN \parallel BD$.

7.39. W równoległoboku $ABCD$ o przekątnych mających długość 8 i 12 wpisano romb $EFGH$ (tzn. wierzchołki rombu leżą odpowiednio na bokach równoległoboku). Boki rombu są równoległe do przekątnych równoległoboku. Oblicz długość boku rombu.

7.40. W trójkącie ABC mamy dane długości boków: $|AB|=c$, $|AC|=b$ i $|BC|=a$. Oblicz długość odcinka CD, gdzie D jest środkiem boku AB.

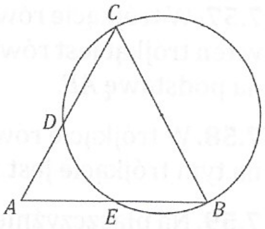
■ **7.41.** Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC, w którym $|\angle C|=90°$, $|AC|=|BC|=2$ oraz punkt P (jak na rysunku obok). Wiedząc, że odległości punktu P od wierzchołków A, B, C są odpowiednio równe a, b, c, wykaż, że: $\left(\dfrac{c^2-a^2+4}{4c}\right)^2+\left(\dfrac{c^2-b^2+4}{4c}\right)^2=1$.



■ **7.42.** W trójkącie ABC mamy dane: $|AB|=15$, $|BC|=21$, $|AC|=24$. Wykaż, że jeden z kątów trójkąta ABC ma miarę 60°.

7.43. Przyprostokątne AB i AC w trójkącie prostokątnym ABC mają odpowiednio długość 6 i 8. Z wierzchołka A poprowadzono dwusieczną kąta prostego, która przecięła bok BC w punkcie D. Oblicz $|AD|$.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi



7.44. Dany jest trójkąt *ABC*, w którym $|AC|=|BC|=34$, $|AB|=32$. Zakreślono okrąg, którego średnicą jest bok *BC*. Okrąg ten przeciął boki *AC* i *AB* odpowiednio w punktach *D*, *E*. Wyznacz długości odcinków: *AD*, *DC*, *AE*, *EB*.

7.45. Rozpatrujemy trójkąty rozwartokątne, w których suma długości dwóch boków jest równa 12 cm, a cosinus kąta α między tymi bokami wynosi $\frac{-3}{8}$. Wyznacz długość trzeciego boku tego trójkąta, który ma największe pole.

■ **7.46.** Wykaż, że w dowolnym trójkącie *ABC* zachodzi następująca zależność między długościami boków a, b, c a miarami kątów trójkąta α, β, γ: $\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}$.

7.47. Trójkąt *ABC*, w którym $|AC|=14$, $|BC|=30$, wpisano w okrąg o promieniu 25. Oblicz sinus kąta przy wierzchołku *C* i długość boku *AB*. Rozważ dwa przypadki.

■ **7.48.** W trójkącie *ABC* mamy dane: $|\angle C|=90°$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Dwusieczna kąta *A* przecięła w punkcie *P* prostą prostopadłą do boku *AB* i przechodzącą przez punkt *B*. Wykaż, że odległość punktu *P* od boku *BC* jest równa $c-b$.

7.49. Dany jest równoległobok o bokach mających długość $a, b\ (a>b)$ i kącie ostrym α. Oblicz tangens kąta ostrego między przekątnymi tego równoległoboku.

■ **7.50.** Na bokach *AC* i *BC* trójkąta *ABC* zaznaczono odpowiednio punkt *D* i punkt *E* tak, że $|AD|=2|DC|$ oraz $|CE|:|EB|=1:2$. Wiadomo, że $|AE|=16$, $|BD|=12$ i $|DE|=5$. Wykaż, że odcinki *AE* i *BD* są do siebie prostopadłe.

7.51. Udowodnij twierdzenie: *W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołka trójkąta).*

7.52. W prostokącie *ABCD* przekątne przecinają się w punkcie *O*. Punkt *K* jest środkiem boku *BC*. Odcinek *DK* przecina przekątną *AC* w punkcie *M*. Oblicz, jaką część pola prostokąta *ABCD* stanowi pole czworokąta *OBKM*.

■ **7.53.** W trapezie *ABCD* suma miar kątów przy dłuższej podstawie *AB* jest równa 90°. Wykaż, że odcinek łączący środki podstaw trapezu ma długość $\frac{|AB|-|DC|}{2}$.

■ **7.54.** Wykaż, że odcinek łączący środki ramion trapezu o podstawach mających długość *a* i *b* jest równoległy do podstaw, a jego długość jest równa $\frac{a+b}{2}$.

7.55. Udowodnij twierdzenie: *W dowolnym trójkącie ABC, w którym półprosta* $CD^{\rightarrow}$, $D\in AB$, *jest dwusieczną kąta wewnętrznego tego trójkąta, prawdziwa jest równość* $\frac{|AC|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|DB|}$.

■ **7.56.** Prostokąt *ABCD*, $|AB|>|AD|$, podzielono prostą *k* równoległą do boku *AD* na dwa prostokąty podobne.

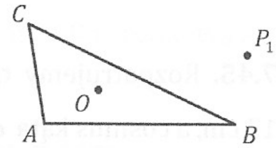
a) Wyznacz długości odcinków, na jakie prosta *k* podzieliła bok *AB*, jeśli $|AB|=10$, $|AD|=3$.

b) Wykaż, że prostokąt *ABCD* można podzielić w omówiony sposób na dwa prostokąty podobne, jeśli $|AB|\geq 2|AD|$.

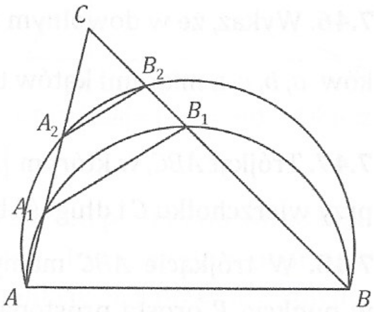
7.57. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość $2a$, promień zaś okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy r. Wyznacz – w zależności od a i r – wysokość w tym trójkącie poprowadzoną na podstawę AB.

7.58. W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość $2a$, promień zaś okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R. Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną na podstawę AB.

7.59. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC, punkt O leży we wnętrzu trójkąta ABC i punkt P_1 leży poza tym trójkątem (zobaczy rysunek obok). Narysuj trójkąt $A_1B_1C_1$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie O, tak aby punkt P_1 należał do jednego z boków trójkąta $A_1B_1C_1$. Ile rozwiązań ma to zadanie?



■ **7.60.** Okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B trójkąta ABC przeciął boki AC i BC odpowiednio w punktach A_1 i B_1. Drugi okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B przeciął boki AC i BC odpowiednio w punktach A_2 i B_2. Wykaż, że $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.



■ **7.61.** Przez punkt S (nie leżący na danym okręgu o) poprowadzono dwie proste, które przecięły okrąg o w punktach A, B oraz A_1, B_1. Niech punkty P, P_1, R, R_1 oznaczają odpowiednio środki odcinków SA, SA_1, SB, SB_1. Wykaż, że na czworokącie o wierzchołkach P, P_1, R, R_1 można opisać okrąg. Rozpatrz dwa przypadki ze względu na położenie punktu S.

■ **7.62.** Na trójkącie ABC opisano okrąg. Z dowolnego punktu D okręgu (różnego od punktów A, B, C) poprowadzono proste prostopadłe do prostych AB, BC, AC i w przecięciu z nimi otrzymano punkty S_1, S_2, S_3. Wykaż, że punkty S_1, S_2, S_3 są współliniowe.

7.63. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg mamy dane długości boków: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|AD| = d$. Oblicz $\cos\alpha$, gdzie α jest kątem czworokąta przy wierzchołku A.

■ **7.64.** W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg mamy dane długości boków: $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$. Wykaż, że:

a) $|AC| = \sqrt{\dfrac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$, $|BD| = \sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}$

b) $|AC| \cdot |BD| = ac + bd$.