

# Dwa równania, dwie niewiadome

Trzeba umieć zastosować metodę wyznaczników do rozwiązania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

## Definicja

Wyznacznikiem macierzy  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  jest liczba  $ad - bc$ .

# Definicja

Wyznacznikiem macierzy  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  jest liczba  $ad - bc$ .

Wyznaczniki macierzy  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  oznaczamy  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  lub  $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

# Definicja

Dla danego układu równań:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$W = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

# Definicja

Dla danego układu równań:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$W = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Jak to zapamiętać?

## Definicja

Dla danego układu równań:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Wprowadzamy oznaczenia:

$$W = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Jak to zapamiętać?  $W$  to wyznacznik lewej strony równań. W pierwszej kolumnie są współczynniki przy  $x$ , w drugiej współczynniki przy  $y$ . By wyznaczyć  $W_x$  zamieniamy kolumnę  $x$  na kolumnę ze współczynnikami z prawej strony równań. Analogicznie, by wyznaczyć  $W_y$  zamieniamy kolumnę  $y$  na kolumnę ze współczynnikami z prawej strony.

# Przykład 1

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$



# Przykład 1

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

## Przykład 1

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-12) = 11$$

# Przykład 1

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 9 = -11$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-12) = 11$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 3 = -11$$

## Przykład 2

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

## Przykład 2

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-6) = 2$$

## Przykład 2

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-6) = 2$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-14) = 10$$

## Przykład 2

Wyznacz  $W$ ,  $W_x$  oraz  $W_y$  dla poniższego równania:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-6) = 2$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 - (-14) = 10$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

# Rozwiązania układu równań

Dla danego układu równań

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$



# Rozwiązania układu równań

Dla danego układu równań

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

- jeśli  $W \neq 0$  to układ ten nazywamy oznaczonym. Rozwiązaniami tego układu są  $x = \frac{W_x}{W}$  i  $y = \frac{W_y}{W}$ .

# Rozwiązania układu równań

Dla danego układu równań

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

- jeśli  $W \neq 0$  to układ ten nazywamy oznaczonym. Rozwiązaniami tego układu są  $x = \frac{W_x}{W}$  i  $y = \frac{W_y}{W}$ .
- jeśli  $W = W_x = W_y = 0$  to układ jest nieoznaczony. Ma nieskończenie wiele rozwiązań.

# Rozwiązania układu równań

Dla danego układu równań

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

- jeśli  $W \neq 0$  to układ ten nazywamy oznaczonym. Rozwiązaniami tego układu są  $x = \frac{W_x}{W}$  i  $y = \frac{W_y}{W}$ .
- jeśli  $W = W_x = W_y = 0$  to układ jest nieoznaczony. Ma nieskończenie wiele rozwiązań.
- jeśli  $W = 0$  i  $W_x$  lub  $W_y$  jest różne od 0 to układ jest sprzeczny - nie ma rozwiązań.

## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 - (-12) = 22$$

## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 - (-12) = 22$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 0 = 22$$

## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10 - (-12) = 22$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 0 = 22$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 44 = -44$$

## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$



## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{22} = 1$$

## Przykład 3

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{22}{22} = 1$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-44}{22} = -2$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - 5y = -10 \end{cases}$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - 5y = -10 \end{cases}$$

Obliczamy

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 10 = -15$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - 5y = -10 \end{cases}$$

Obliczamy

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 10 = -15$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} = -35 - (-20) = -15$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Przekształcamy równanie do postaci:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - 5y = -10 \end{cases}$$

Obliczamy

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 10 = -15$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -10 & -5 \end{vmatrix} = -35 - (-20) = -15$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = -10 - 35 = -45$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$



## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Obliczamy

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Obliczamy

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-15}{-15} = 1$$

## Przykład 4

Rozwiąż poniższe równanie metodą wyznaczników.

$$\begin{cases} 2y = 7 - x \\ 5x + 10 = 5y \end{cases}$$

Obliczamy

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-15}{-15} = 1$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-45}{-15} = 3$$

# Wejściówka

Na wejściówkę trzeba umieć rozwiązać przykłady korzystając z metody wyznaczników.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na [T.J.Lechowski@gmail.com](mailto:T.J.Lechowski@gmail.com).