# 11. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

## Zadania zamknięte

### ABCD Zadanie 1168.

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ dla $x \neq -2$. Granica $\lim_{x \to -2} f(x)$ jest równa:

A. $-\infty$ B. $-2$ C. $-4$ D. $+\infty$

### ABCD Zadanie 1169.

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 5}$ dla $x \neq 5$. Granica $\lim_{x \to -2} f(x)$ jest równa:

A. $-7$ B. $-1$ C. $0$ D. $1$

### ABCD Zadanie 1170.

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x + 1$ dla $x \in R$. Granica $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ jest równa:

A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. $0$ D. $1$

### ABCD Zadanie 1171.

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = -3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ dla $x \in R$. Granica $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ jest równa:

A. $-\infty$ B. $-3$ C. $-7$ D. $+\infty$

### ABCD Zadanie 1172.

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = -3x^4 - 5x^2 - 7$ dla $x \in R$. Granica $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ jest równa:

A. $-\infty$ B. $-7$ C. $3$ D. $+\infty$

ABCD **Zadanie 1173.**

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x)=\frac{x}{x-3}$ dla $x\neq 3$. Granica $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ jest równa:

A. $+\infty$ B. 1 C. 0 D. $-3$

ABCD **Zadanie 1174.**

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x)=\frac{x+17}{x^2+34}$ dla $x\in R$. Granica $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ jest równa:

A. 0 B. 1 C. 17 D. $+\infty$

ABCD **Zadanie 1175.**

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x)=\frac{x^5+15}{x^4+14}$ dla $x\in R$. Granica $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ jest równa:

A. $+\infty$ B. $\frac{15}{14}$ C. 0 D. $-\infty$

ABCD **Zadanie 1176.**

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x)=\frac{x^5+15}{x^4+14}$ dla $x\in R$. Granica $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ jest równa:

A. $+\infty$ B. $\frac{15}{14}$ C. 0 D. $-\infty$

ABCD **Zadanie 1177.**

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x)=\frac{3x^{10}-11}{4x^{10}+11}$ dla $x\in R$. Granica $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ jest równa:

A. $-\infty$ B. $-1$ C. $\frac{3}{4}$ D. $+\infty$

ABCD **Zadanie 1178.**

Dla funkcji $f$ określonej wzorem $f(x)=\log_2\left|\log_2|x|\right|$ prawdziwe jest stwierdzenie:

A. funkcja $f$ jest ciągła w zbiorze $R$,
B. funkcja $f$ ma granicę niewłaściwą w punkcie $x_0=0$,
C. funkcja $f$ ma granicę w punkcie $x_0=0$ równą 1,
D. funkcja $f$ ma granicę w punkcie $x_0=0$ równą $\log_2 10$.





ABCD **Zadanie 1179.**

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x)=2x-x^3$. Granica $\lim_{x\to-2} f(x)$ jest równa:

A. 0 B. $-4$ C. 4 D. $-12$

ABCD **Zadanie 1180.**

Funkcja $f$ określona wzorem $f(x)=\frac{5x-x^3}{x^2-5}$:

A. jest ciągła w $x_0=-\sqrt{5}$,
B. $x_0=-\sqrt{5}$ ma granicę właściwą równą 1,
C. jest ciągła w $x_0=\sqrt{5}$,
D. ma granicę w $x_0=\sqrt{5}$.

ABCD **Zadanie 1181.**

Funkcja $f$ określona wzorem $f(x)=\begin{cases} x & \text{dla } x\in(-\infty;1) \\ x^2 & \text{dla } x\in\langle 1;+\infty) \end{cases}$

A. jest ciągła w $R$ B. $\lim_{x\to-2} f(x)=4$ C. $\lim_{x\to2} f(x)=2$ D. $\lim_{x\to1} f(x)\neq 1$

ABCD **Zadanie 1182.**

Funkcja liniowa $f$ spełnia warunki $f(0)=1$ i $f(\sqrt{2})=2$, zatem:

A. $f'(-1)=-\sqrt{2}$ B. $f'(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $f'(1)=\sqrt{2}$ D. $f'(\sqrt{2})=1$

ABCD **Zadanie 1183.**

Styczna do wykresu funkcji $f$ danej wzorem $f(x)=\frac{x-7}{x+2}$ w punkcie $x_0$ tworzy z osią $OX$ kąt o mierze $\frac{\pi}{4}$. $x_0$ może być równe:

A. $-5$ B. 5 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ABCD **Zadanie 1184.**

Styczna do paraboli $y=x^2-x+6$ w punkcie $x_0=0$ tworzy z osią $OX$ kąt, którego miara jest równa:

A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. 0

ABCD **Zadanie 1185.**

Krzywe będące wykresami funkcji $f(x) = -x^2 + 2$ i $g(x) = x^2 + 5x - 1$ przecinają się w $x_0 = 0{,}5$ pod kątem, którego tangens jest równy:

A. $5$ B. $\frac{7}{5}$ C. $-1$ D. $\frac{-7}{5}$

ABCD **Zadanie 1186.**

Funkcja $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}ax$ jest rosnąca w zbiorze $R$, jeżeli $a$ jest równe:

A. $-2$ B. $-5$ C. $15$ D. $-\frac{1}{5}$

ABCD **Zadanie 1187.**

Funkcja $f$ określona wzorem $f(x) = x^2 + x - 1$ ma w przedziale $\langle -2; 5\rangle$ najmniejszą wartość równą:

A. $-6$ B. $-0{,}5$ C. $-1{,}25$ D. $4$

ABCD **Zadanie 1188.**

Funkcja $f$ określona wzorem $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x - 1$ ma w przedziale $\langle -2; 5\rangle$ największą wartość równą:

A. $\frac{641}{4}$ B. $625$ C. $13$ D. $1$

ABCD **Zadanie 1189.**

Funkcja $f(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2$ ma w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$ pochodną równą:

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{9}{4}$

ABCD **Zadanie 1190.**

Prostokąt ma obwód równy 16 cm. Długość przekątnej prostokąta o największym polu jest równa:

A. $3\sqrt{2}$ cm B. $4\sqrt{2}$ cm C. $4\sqrt{10}$ cm D. $\sqrt{34}$ cm





ABCD **Zadanie 1191.**

W półkole o promieniu 2 wpisano trójkąty równoramienne, których wierzchołek leży w środku koła. Pole największego z wpisanych trójkątów wynosi:

A. $1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $2$

ABCD **Zadanie 1192.**

Funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3 - x^2}{2 - x}$, $x \neq 2$ ma ekstremum w punkcie:

A. $x = 3$ B. $x = \sqrt{3}$ C. $x = 0$ D. $x = -\sqrt{3}$

## Zadania kodowane

**Zadanie 1193.**

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^{10} - 11x^5 - 13x^2 + 32}{4x^{10} + 11x - 55}$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

**Zadanie 1194.**

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{11x^5 - 13x^2 + 32}{4x^5 + 11x - 55}$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

**Zadanie 1195.**

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

**Zadanie 1196.**

Oblicz, dla jakich wartości parametru $k$ granica funkcji $\lim\limits_{x\to1} \frac{kx^2 - 1}{3x^2 + x + 1} = \frac{4}{3}$.

Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1197.

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+\sqrt{x}}}{x}$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1198.*

Oblicz $\left|\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-3}{x^3-7x+6}\right|$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1199.*

Oblicz $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x+2}$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1200.

Oblicz $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+7x}{x}$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1201.

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem $f(x)=x^3+10x^2-15$. Oblicz wartość pochodnej funkcji $f(x)$ dla $x=2$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i części dziesiętnych otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1202.

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{x+7}{1-x+x^2}$. Oblicz wartość pochodnej funkcji $f(x)$ dla $x=-2$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1203.

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem $f(x)=(x+\sqrt{2})(x^3-2\sqrt{3})$. Oblicz wartość pochodnej funkcji $f(x)$ dla $x=1$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).



### Zadanie 1204.

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{x(x+\sqrt{2})}{x-2}$. Oblicz $|f'(x)|$ dla $x=1$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych przybliżenia rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku).

### Zadanie 1205.

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem $f(x)=\frac{9-x^2}{x^2}$ dla $x\neq0$. Oblicz największą wartość tej funkcji w przedziale $\left\langle\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right\rangle$. Zakoduj odpowiedź (kolejno: cyfrę jedności, części dziesiętnych i części setnych otrzymanego wyniku).

## Zadania otwarte

### Zadanie 1206.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{12}-10x^5+12)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^{12}-10x^3-2)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+2x^3+2x+15)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-7x^7+2x^2+4x-5)$

### Zadanie 1207.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{12}-10x^5+212)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^{12}+13x^3-21)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x^5+2x^3+22x+5)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x^7+2x^2+x-55)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(17x^5+12x^4+3x-15)$

## Zadanie 1208.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+1}-2x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-4x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-x)$

## Zadanie 1209.

Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x+7}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-8}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x^2}{x^3-9}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+12x}{4x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^3+11x}{4x^2+5}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-16x^3-17x}{x^2+25}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-4)(x-3)(x-2)}{5x^3-6}$

## Zadanie 1210.

*Matura próbna XII 2014 r., 2 p.*

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$





## Zadanie 1211.

Oblicz granicę funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0$:

a) $f(x)=\frac{x+13}{x^2+1}$, $x_0=2$

b) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$, $x_0=3$

c) $f(x)=\frac{2x^2-8}{x^4-16}$, $x_0=-2$

d) $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^3-8}$, $x_0=2$

e) $f(x)=\frac{x^3-\sqrt{5}x^2+3x^2-4\sqrt{5}x+5}{x^2-5}$, $x_0=\sqrt{5}$

## Zadanie 1212.

Oblicz granicę funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0$:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-9}{x-81}$, $x_0=81$

b) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+9}-3}$, $x_0=0$

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$, $x_0=0$

## Zadanie 1213.

Oblicz granice jednostronne funkcji:

a) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ w punkcie $x=2$

b) $f(x)=\frac{1}{2-x}$ w punkcie $x=2$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)^2$ w punkcie $x=2$

d) $f(x)=\left(\frac{1}{2-x}\right)^3$ w punkcie $x=2$

e) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ w punkcie $x=3$

f) $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ w punkcie $x=-3$

## Zadanie 1214.

Wykaż, że funkcja $f(x)$ określona wzorem $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \end{cases}$ nie jest ciągła w $x = 0$.

## Zadanie 1215.

Określ, dla jakiego argumentu $x$ funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)^2$ jest nieciągła. Odpowiedź uzasadnij.

## Zadanie 1216.

Sprawdź, czy funkcja $f(x)$ określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ dla } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x \text{ dla } 1 < x \le 2 \end{cases}$ jest ciągła w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$

## Zadanie 1217.

Sprawdź, czy funkcja $f(x)$ określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x \text{ dla } 1 < x \le 2 \end{cases}$ jest ciągła w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$.

## Zadanie 1218.

Oblicz wartość parametru $a$, dla którego funkcja $f(x)$ określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 2^x + 8 \text{ dla } x \le 0 \\ (x-a)^2 \text{ dla } x > 0 \end{cases}$ jest ciągła w w zbiorze liczb rzeczywistych.

## Zadanie 1219.

Oblicz pochodną funkcji $f(x)$, gdy:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

b) $f(x) = x^{115} + 10x^{15} + 225$

c) $f(x) = -\frac{2}{5}x^{10} + \frac{1}{3}x^6$

d) $f(x) = (ax^4 + bx)(x - c)$

e) $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$

f) $f(x) = x^{\frac{1}{4}} - x^4 + 4x - \frac{1}{4}$, $x > 0$





## Zadanie 1220.

Oblicz pochodną funkcji $f(x)$, gdy:

a) $f(x) = \frac{2}{2x-9}$ dla $x \in R - \left\{\frac{9}{2}\right\}$

b) $f(x) = \frac{3x}{2x^2 - x + 2}$ dla $x \in R$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 3x + 2}$ dla $x \in R - \{1, 2\}$

d) $f(x) = \frac{3x}{(1-x^2)(1+2x^2)}$ dla $x \in R - \{-1, 1\}$

e) $f(x) = \frac{5}{2x^3\sqrt{x}}$ dla $x > 0$

f) $f(x) = \frac{5}{2x^3\sqrt{x}} + \frac{4}{3\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x}$ dla $x > 0$

## Zadanie 1221.

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$. Oblicz $f'(0)$ i $f'(-1)$.

## Zadanie 1222.

Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem $f(x) = 10x^2 - 3$. Oblicz, korzystając z definicji, wartość pochodnej funkcji $f(x)$ dla $x = 2$.

## Zadanie 1223.

*Matura próbna XII 2014 r., 2 p.*

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. Oblicz pochodną funkcji $f$ w punkcie $x = 12$.

## Zadanie 1224.

Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x$ nie ma ekstremum w zbiorze liczb rzeczywistych.

## Zadanie 1225.

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^5 + 2x^3 + 2x + 15$ w przedziale $\langle 1; 10 \rangle$.

## Zadanie 1226.

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^4 + 2x^2 + 8x - 5$ w przedziale $\langle -2; 10 \rangle$.

## Zadanie 1227.

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 1$. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji.

## Zadanie 1228.

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{4}{x}$. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji.

## Zadanie 1229.

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{5x^2 + 3x + 1}{x + 1}$. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji.

## Zadanie 1230.

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 3}$. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji.

## Zadanie 1231.

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x - 15}{x^2 - 9}$. Wyznacz dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji.

## Zadanie 1232.

Oblicz, dla jakich argumentów istnieją ekstrema lokalne funkcji $f(x)$ określonej w przedziale domkniętym $\langle -10; 10 \rangle$ wzorem $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x$.

## Zadanie 1233.

Funkcja $f(x)$ dana jest wzorem $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Wyznacz jej dziedzinę, przedziały monotoniczności, ekstremum lokalne i granice funkcji w nieskończoności. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$ i na podstawie wykresu określ, jak zmienia się liczba rozwiązań równania $\frac{1}{x^2 + 1} = m$ w zależności od wartości parametru $m$.





## Zadanie 1234.*

Uzasadnij, że równanie $2x = 4^{-x}$ ma pierwiastek w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$.

## Zadanie 1235.*

Wykaż, że równanie $x + 2 = 3^x$ ma pierwiastek w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$.

## Zadanie 1236.*

Wykaż, że równanie $3^x + x^3 = 100$ ma dokładnie jeden pierwiastek.

## Zadanie 1237.*

Wykaż, że równanie $x^3 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale $(0; 1)$.

## Zadanie 1238.*

Uzasadnij, że równanie $x + \cos x = a$ ma rozwiązanie dla każdego $a \in R$.

## Zadanie 1239.

*Matura 2001 r.*

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = 3 - x + \frac{3 - x}{x - 5} + \frac{3 - x}{(x - 5)^2} + \ldots + \frac{3 - x}{(x - 5)^{n-1}} + \ldots$

## Zadanie 1240.

Funkcja $f(x) = \frac{a(x + 2)}{(x + 1)(x - 2)}$ osiąga ekstremum równe 5 dla $x = 0$. Oblicz $a$ i rozstrzygnij, czy dla $x = 0$ funkcja ta ma maksimum, czy minimum lokalne.

## Zadanie 1241.

Funkcja $f(x) = ax^3 + bx + 3$ osiąga ekstremum równe 6 dla $x_0 = -1$. Wyznacz $a$ i $b$.

## Zadanie 1242.

*Matura 1992 r.*

Niech $X_m$ i $X_M$ oznaczają punkty, w których funkcja $y = f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$ osiąga odpowiednio minimum i maksimum. Dla jakich wartości parametru $a$ zachodzi równość $X_m = X_M{}^2$?

## Zadanie 1243.

Oblicz, jaki kąt z osią $OX$ tworzy styczna do wykresu funkcji $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$ w punkcie $P = (1, 2)$.

## Zadanie 1244.

Wyznacz odciętą punktu, w którym styczna do wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 4$ tworzy z osią $OX$ kąt $\alpha = 45°$.

## Zadanie 1245.

Napisz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x$ równoległych do prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$.

## Zadanie 1246.

Oblicz, dla jakich wartości parametrów $a$ i $b$ styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + ax + b$ w punkcie $P = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ jest nachylona do osi odciętych pod kątem o mierze 135°.

## Zadanie 1247.

Oblicz, pod jakim kątem przecinają się wykresy funkcji $f(x) = 3x^3 + 1$ oraz $g(x) = -x^2 - x + 6$. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1°.

## Zadanie 1248.

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $g(x) = \frac{5}{x}$ w punkcie $A = \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

## Zadanie 1249.

*Matura próbna XII 2014 r., 3 p.*

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = x^4$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f$, która jest równoległa do prostej $y = 4x + 7$.

## Zadanie 1250.

Styczna do wykresu funkcji $f(x) = 3x^3 + 1$ w punkcie $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right)$ ma z tym wykresem jeszcze jeden punkt wspólny $B$. Oblicz współrzędne punktu $B$.





## Zadanie 1251.

Napisz równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = (x^2 - 7)(x - 1)$, których współczynnik kierunkowy $a = 1$.

## Zadanie 1252.

*Matura V 2015, 4 p.*

Funkcja $f$ określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji $f$, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

## Zadanie 1253.

Oblicz, dla jakich liczb $a$ i b suma ich sześcianów jest najmniejsza, jeżeli suma tych liczb jest równa 30.

## Zadanie 1254.

Dane są trapezy równoramienne o długościach ramion równych 6 cm i długości krótszej podstawy równej 6 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy takiego trapezu, który ma największe pole.

## Zadanie 1255.

Oblicz, jakie jest największe pole trójkąta prostokątnego, którego połowa obwodu jest równa $p$.

## Zadanie 1256.

Oblicz, który z trójkątów prostokątnych o danym polu $P$ ma najmniejszy obwód.

## Zadanie 1257.

*Egzamin wstępny 1978 r.*

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $M = (1, 2)$ i tworzącej z dodatnimi półosiami prostokątnego układu współrzędnych trójkąt o najmniejszym polu powierzchni.

## Zadanie 1258.

*Egzamin wstępny 1977 r.*

Dany jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 24 i mierze jednego z kątów ostrych równej $\frac{\pi}{6}$. Rozpatrujemy prostokąty, których dwa wierzchołki należą do przeciwprostokątnej, a dwa pozostałe do przyprostokątnych tego trójkąta. Wyznacz długości boków prostokąta o największym polu powierzchni. Oblicz to pole.

## Zadanie 1259.

*Matura próbna XII 2014 r., 7 p.*

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

## Zadanie 1260.

*Matura 1975 r.*

Obwód trójkąta równoramiennego jest równy $a$. Przy jakich długościach boków pole trójkąta jest największe?

## Zadanie 1261.

Obraz w prostokątnej ramie o wymiarach 4 m × 3 m jest zawieszony na ścianie na wysokości 2 m nad poziomem oka obserwatora. Oblicz, z jakiej odległości od ściany obserwator powinien oglądać obraz, by widzieć go pod największym kątem. Oblicz ten kąt.

## Zadanie 1262.

*Egzamin wstępny 1976 r.*

Wyznacz długości krawędzi prostopadłościennego pojemnika bez pokrywy o kwadratowym dnie i pojemności 0,5 $m^3$, aby na jego wykonanie zużyć jak najmniej materiału. Przedstaw graficznie zależność zużytego materiału od długości krawędzi dna pojemnika.

## Zadanie 1263.

*Matura 1976 r.*

Obwód prostokąta wynosi $2p$. Jakie powinny być jego boki, aby objętość walca powstałego przez obrót tego prostokąta dookoła jednego z boków była maksymalna?

## Zadanie 1264.

*Matura V 2015, 7 p.*

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

## Zadanie 1265.

Nad bramą posesji, na wysokości 3 m nad ziemią, zamontowana jest latarnia. Właściciel posesji o wzroście 175 cm oddala się od bramy z prędkością 1,1 m/s. Oblicz, z jaką prędkością wydłuża się jego cień.



## Zadanie 1266.

Równanie $s(t) = 10\sqrt{t^3}$ określa ruch punktu po prostej. Oblicz prędkość tego punktu w chwili $t = 4$.

## Zadanie 1267.

Równanie $s(t) = 3t^3 - t^2 + 4$ określa ruch punktu po prostej. Oblicz prędkość tego punktu w chwili $t = 2$.

## Zadanie 1268.

Droga, jaką przebywa samochód w czasie $t$ sekund, jest równa $t^2 - 2t$ metrów. Oblicz, z jaką prędkością jedzie samochód po 10 sekundach oraz przyspieszenie pojazdu po upływie $t$ sekund.

## Zadanie 1269.

Drogę przebytą przez wyrzucony pionowo do góry kamień opisuje wzór $s(t) = 20t - 0{,}5gt^2$ ($g$ – przyspieszenie ziemskie $\approx 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Oblicz prędkość kamienia po 2 s. Po ilu sekundach kamień zacznie spadać?