Zestaw D. Zadania otwarte

odpowiedzi – s. 216
modele – s. 217

Zadanie 1. (3 pkt)
Wyznacz parametr a, jeśli wiadomo, że:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\frac{1}{4}$$

Zadanie 2. (3 pkt)
Wykaż, że styczne poprowadzone do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$ w punktach o rzędnej 1, przechodzą przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 3. (3 pkt) CKE
Dana jest parabola o równaniu $y=x^2+1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A.

Zadanie 4. (3 pkt) CKE
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

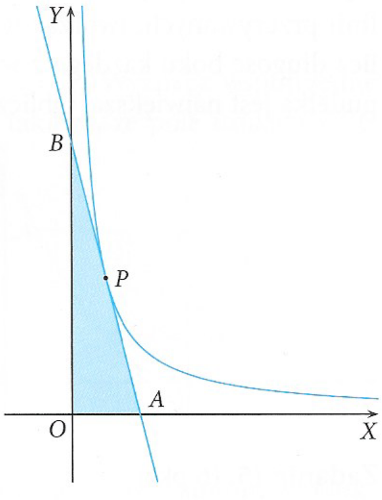
Zadanie 5. (4 pkt)
Wyznacz parametr a tak, aby prosta o równaniu $y=-2x+1$ była styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^3+ax+1$. Podaj współrzędne punktu styczności.

Zadanie 6. (3 pkt)
Uzasadnij, że kąt między styczną do wykresu funkcji $f(x)=2x^5+x-7$ a osią OX jest kątem ostrym. Wyznacz równanie stycznej, dla której kąt ten ma miarę 45°.

Zadanie 7. (5 pkt)
Punkt $P(x_0, y_0)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$.

a) Styczna do wykresu funkcji f w punkcie P przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B (rysunek obok). Uzasadnij, że punkt P jest środkiem odcinka AB.

b) Wykaż, że pole trójkąta ABO jest równe 2.



Zadanie 8. (4 pkt) CKE 2015
Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^3-2x^2+1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y=4x$.

Zadanie 9. (4 pkt)
Wyznacz ekstrema funkcji $f(x)=(x+2)^2(x-4)$. Ile rozwiązań ma równanie $f(x)=-30$?

Zadanie 10. (4 pkt)
Funkcja $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, ma dla $x = 3$ minimum równe 7. Oblicz a i b oraz wyznacz pozostałe ekstrema tej funkcji.

Zadanie 11. (5 pkt)
Dla jakich wartości x i y takich, że $y - x = 1$, wyrażenie $\frac{y^2-2x+1}{x^2+2y}$ przyjmuje największą wartość. Wyznacz tę wartość.

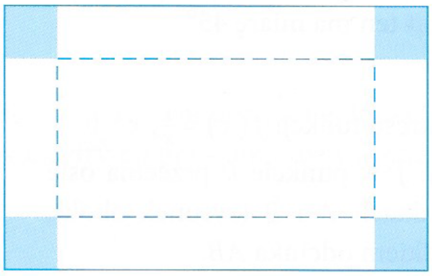
Zadanie 12. (6 pkt)
Dwa wierzchołki A i B kwadratu $ABCD$ należą do prostej $x - 2y = 0$, a wierzchołek C należy do hiperboli o równaniu $y = -\frac{8}{x}$. Oblicz długość przekątnej kwadratu, którego pole jest najmniejsze.

Zadanie 13. (6 pkt)
Dla jakich wartości parametru p suma sześcianów różnych pierwiastków równania:

$$x^2 + px + p^2 - 1 = 0$$

osiąga największą wartość? Oblicz tę wartość.

Zadanie 14. (7 pkt) CKE
Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.



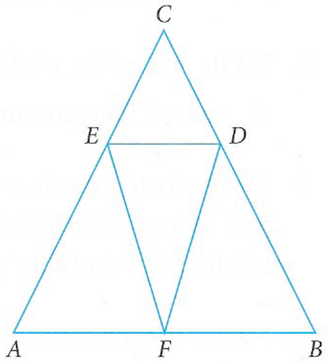
Zadanie 15. (6 pkt)
Pudełko ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Wyznacz długość krawędzi podstawy, przy której pole powierzchni pudełka jest najmniejsze, jeśli jego objętość wynosi 36 cm^3. Oblicz pole powierzchni tego pudełka.

Zadanie 16. (6 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość 2 i dla którego stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola tego trójkąta jest najmniejszy.

Zadanie 17. (7 pkt) CKE 2015
Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Zadanie 18. (7 pkt)
W półkole o promieniu r wpisano prostokąt o największym polu. Oblicz cosinus kąta rozwartego między przekątnymi tego prostokąta.

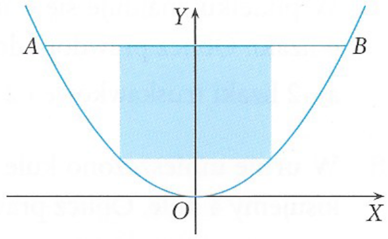
Zadanie 19. (6 pkt)
W trójkąt równoramienny ABC o podstawie $|AB| = a$ wpisano drugi trójkąt równoramienny DEF, którego dwa wierzchołki podstawy leżą na ramionach danego trójkąta, a trzeci wierzchołek leży w środku jego podstawy (rysunek obok). Dla jakiej długości podstawy trójkąta wpisanego stosunek objętości stożka, którego przekrojem osiowym jest ten trójkąt, do stożka o przekroju osiowym ABC jest największy?



Zadanie 20. (6 pkt)
Przez punkt $P(1, 9)$ poprowadzono prostą o współczynniku kierunkowym ujemnym tak, że suma długości odcinków, które ta prosta odcięła na osiach układu współrzędnych, jest najmniejsza. Wyznacz równanie tej prostej.

Zadanie 21. (6 pkt)
Punkty $A(-4, -1)$ i $B(-2, -2)$ należą do hiperboli o równaniu $y = \frac{4}{x}$. Wyznacz współrzędne punktu C o odciętej dodatniej, należącego do danej hiperboli i takiego, że pole trójkąta ABC jest najmniejsze.

Zadanie 22. (6 pkt)
Dwa wierzchołki prostokąta należą do paraboli o równaniu $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, a dwa – do odcinka o końcach $A(-4, 4)$ i $B(4, 4)$ (rysunek obok). Wyznacz długości boków prostokąta, którego pole powierzchni jest największe.



Zadanie 23. (6 pkt)
Funkcja $f(x) = -x^3 + (a + 1)x^2 + 12x + b$ osiąga minimum w punkcie A i maksimum w punkcie B. Wyznacz współrzędne tych punktów, wiedząc, że są one symetryczne względem początku układu współrzędnych.

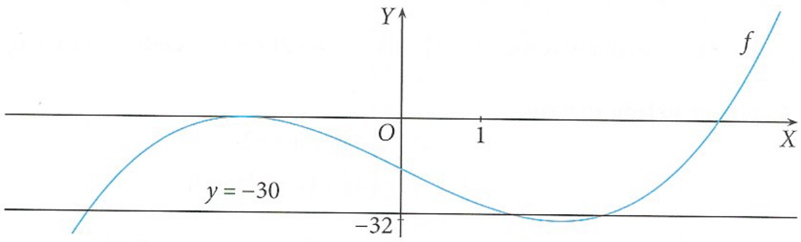
Zadanie 24. (7 pkt) CKE 2015
Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

12. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

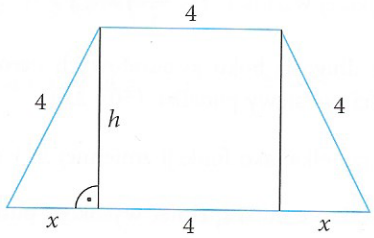
Zestaw D – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
1.	Przekształcenie różnicy: $\frac{a}{1-x}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{-a-ax-1}{x^2-1}=-\frac{ax+a+1}{(x-1)(x+1)}$
	Zauważenie, że funkcja ma skończoną granicę przy x dążącym do 1, gdy $ax+a+1=x-1$
	Wyznaczenie a: $a=-\frac{1}{2}$ i sprawdzenie, że dla $a=-\frac{1}{2}$ granica jest równa $\frac{1}{4}$
2.	Wyznaczenie argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość 1: $x=-1$ lub $x=1$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{16x}{(3+x^2)^2}$
	Zapisanie równań stycznych: $y=-x$, $y=x$ oraz zauważenie, że ich wykresy przechodzą przez początek układu współrzędnych
3.	Wyznaczenie pochodnej funkcji $f(x)=x^2+1$: $f'(x)=2x$
	Obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a=f'(3)=6$
	Wyznaczenie równania stycznej do paraboli w punkcie $A(3,10)$: $y=6x-8$
4.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=12x^2-2$
	Wyznaczenie argumentów, dla których pochodna funkcji przyjmuje wartość 10: $x=-1$ lub $x=1$, oraz obliczenie wartości funkcji dla tych argumentów: $f(-1)=-1$, $f(1)=3$
	Zauważenie, że punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ leży na prostej l. Zatem prosta o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f
5.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x_0)=3x_0^2+a=-2$
	Zapisanie równania stycznej: $y-x_0^3-ax_0-1=-2(x-x_0)$, czyli $y=-2x+x_0^3+(2+a)x_0+1$
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases}3x_0^2+a=-2\\ x_0^3+(2+a)x_0=0\end{cases}$
	Podanie odpowiedzi: $a=-2$, współrzędne punktu styczności $(0,1)$
6.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=10x^4+1=\operatorname{tg}\alpha$
	Zauważenie, że pochodna funkcji jest zawsze dodatnia, czyli $\operatorname{tg}\alpha>0$, zatem kąt między dowolną styczną do wykresu funkcji f a osią OX jest kątem ostrym
	Wyznaczenie równania stycznej do wykresu funkcji f nachylonej do osi OX pod kątem 45°: $y=x-7$

Zadania powtórzeniowe, s. 91–92

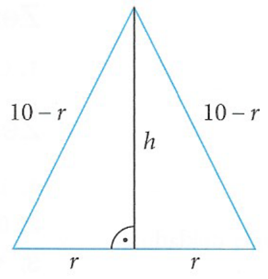
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
7. a)	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ oraz współrzędnych punktu P: $P\left(x_0, \frac{1}{x_0}\right)$
	Zapisanie równania stycznej: $y = -\frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0}$
	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B: $A(2x_0, 0)$, $B\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$
	Wykazanie, że punkt P jest środkiem odcinka AB: $S_{AB} = \left(\frac{2x_0}{2}, \frac{2}{2x_0}\right) = \left(x_0, \frac{1}{x_0}\right) = P$
7. b)	Obliczenie pola trójkąta ABO: $P = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$
8.	Zapisanie równania stycznej w postaci: $y = f'(x_0)x + b$ i zauważenie, że $f'(x_0) = 4$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ i znalezienie argumentów, dla których $f'(x) = 4$: $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 2$
	Wyznaczenie punktów styczności: $P_1 = (x_1, f(x_1)) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{27}\right)$, $P_2 = (x_2, f(x_2)) = (2, 1)$
	Wyznaczenie równań stycznych: $l_1: y = 4x + \frac{67}{27}$, $l_2: y = 4x - 7$
9.	Zapisanie wzoru funkcji f w postaci: $f(x) = x^3 - 12x - 16$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 3x^2 - 12$
	Wyznaczenie ekstremów funkcji f: minimum w punkcie $x = 2$, $f(2) = -32$, maksimum w punkcie $x = -2$, $f(-2) = 0$
	Wykonanie szkicu wykresu funkcji f oraz podanie odpowiedzi: Równanie $f(x) = -30$ ma trzy rozwiązania. 
10.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$
	Zauważenie, że $f'(3) = 0$, czyli $a + b = 3$, oraz $f(3) = \frac{9+3a+b}{2} = 7$, czyli $3a + b = 5$
	Obliczenie a i b: $a = 1$, $b = 2$
	Wyznaczenie pozostałych ekstremów: maksimum w punkcie $x = -1$, $f(-1) = -1$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
11.	Zapisanie wzoru funkcji f: $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+2x+2}$, $x\in\mathbf{R}$
	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{2x^2-4}{(x^2+2x+2)^2}$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x=-\sqrt{2}$ lub $x=\sqrt{2}$
	Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ dla $x\in(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\infty)$ oraz $f'(x)<0$ dla $x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, więc dla $x=-\sqrt{2}$ funkcja f przyjmuje największą wartość
	Wyznaczenie największej wartości: $f(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$
12.	Zauważenie, że długość a boku kwadratu jest odległością punktu $C\left(x,-\frac{8}{x}\right)$ od prostej AB, czyli $a=\frac{\sqrt{5}}{5}\left\|x+\frac{16}{x}\right\|$
	Zapisanie pola kwadratu: $P(x)=\frac{1}{5}\left(x+\frac{16}{x}\right)^2=\frac{1}{5}x^2+\frac{32}{5}+\frac{256}{5x^2}$, $x\neq 0$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x)=\frac{2}{5}x-\frac{512}{5x^3}$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x=-4$, $x=4$
	Stwierdzenie, że $P'(x)>0$ dla $x\in(-4;0)\cup(4;\infty)$ oraz $P'(x)<0$ dla $x\in(-\infty;-4)\cup(0;4)$ i $P(-4)=P(4)$, więc dla $x=4$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą
	Obliczenie długości przekątnej kwadratu: $a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{10}}{5}\left\|x+\frac{16}{x}\right\|=\frac{8}{5}\sqrt{10}$
13.	Zapisanie sumy sześcianów pierwiastków równania za pomocą wzorów Viète'a: $x_1^3+x_2^3=3\frac{bc}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}$
	Zapisanie sumy sześcianów jako funkcji zmiennej p: $f(p)=2p^3-3p$ oraz podanie jej dziedziny: $D=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(p)=6p^2-3$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $p=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$
	Stwierdzenie, że $f'(p)>0$ dla $p\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $f'(p)<0$ dla $p\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, więc dla $p=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ funkcja f przyjmuje największą wartość
	Wyznaczenie największej wartości: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$
14.	Oznaczenie literą x długości boku kwadratowych naroży, zapisanie długości podstawy pudełka: $(80-2x)$ i szerokości podstawy pudełka: $(50-2x)$
	Zapisanie objętości pudełka jako funkcji zmiennej x: $V(x)=(80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x$
	Zapisanie warunków, które musi spełniać wysokość pudełka: $0<x<25$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
14. cd.	Obliczenie pochodnej funkcji $f(x) = x^3 - 65x^2 + 1000x$: $f'(x) = 3x^2 - 130x + 1000$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x_1 = 10$, $x_2 = 33\frac{1}{3}$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (0;10)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (10;25)$, więc w przedziale $(0;10\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle 10;25)$ jest malejąca. Zatem dla $x = 10$ funkcja f przyjmuje największą wartość w dziedzinie $(0;25)$
	Zapisanie, że długość boku kwadratowych naroży jest równa 10 cm i obliczenie największej objętości: $V(10) = (80-20)(50-20) \cdot 10 = 18\,000$ [cm^3]
15.	Wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $H = \frac{8\sqrt{3}}{a^2}$, gdzie krawędź podstawy $a > 0$
	Zapisanie pola powierzchni pudełka jako funkcji zmiennej a: $P(a) = 3\sqrt{3}\left(a^2 + \frac{16}{a^2}\right)$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(a) = 6\sqrt{3}\left(a - \frac{8}{a^2}\right)$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $a = 2$
	Stwierdzenie, że $P'(a) > 0$ dla $a \in (2;\infty)$ oraz $P'(a) < 0$ dla $a \in (0;2)$, więc w przedziale $\langle 2;\infty)$ funkcja P jest rosnąca i w przedziale $(0;2\rangle$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $a = 2$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą
	Obliczenie pola powierzchni pudełka: $P = 36\sqrt{3}$ cm^2
16.	Oznaczenie przyprostokątnej jako x, $x > 0$, i przeciwprostokątnej jako $2r$, gdzie r jest promieniem koła opisanego na trójkącie, oraz obliczenie r: $r = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}$
	Zapisanie stosunku pól jako funkcji zmiennej x: $f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2+4}{x}$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2-4}{x^2}$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej dla $x > 0$: $x = 2$
	Stwierdzenie, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (2;\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0;2)$, więc w przedziale $\langle 2;\infty)$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $(0;2\rangle$ jest malejąca. Zatem dla $x = 2$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą
	Obliczenie obwodu trójkąta: $Obw = 4 + 2\sqrt{2}$
17.	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń 

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
17. cd.	Wyznaczenie wysokości trapezu na podstawie twierdzenia Pitagorasa: $h=\sqrt{16-x^2}$ oraz napisanie wzoru na pole trapezu: $P(x)=(x+4)\sqrt{16-x^2}$, gdzie $x \in (0;4)$
	Zauważenie, że funkcja P wartość największą przyjmuje w tych samych punktach, co funkcja $f(x)=P^2(x)=(x+4)^2(16-x^2)=-(x+4)^3(x-4)$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=-4(x+4)^2(x-2)$ i jej miejsc zerowych: $x_1=x_2=-4$, $x_3=2$
	Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ dla $x \in (0;2)$ oraz $f'(x)<0$ dla $x \in (2;4)$, więc w przedziale $(0;2\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle 2;4)$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $x=2$ funkcja f przyjmuje wartość największą, co oznacza, że funkcja P również przyjmuje wartość największą dla $x=2$
	Obliczenie dłuższej podstawy trapezu: 8 dm oraz jego pola: $P=12\sqrt{3}$ dm^2
	Podanie odpowiedzi
18.	Oznaczenie długości podstawy i wysokości prostokąta odpowiednio przez x i y oraz zauważenie, że $y^2=r^2-\frac{x^2}{4}$, gdzie $x \in (0;2r)$
	Zapisanie pola prostokąta jako funkcji zmiennej x: $$P(x)=x\sqrt{r^2-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{x^2r^2-\frac{x^4}{4}}$$
	Zauważenie, że wartość funkcji P będzie największa dla argumentu, dla którego największa będzie wartość funkcji $f(x)=x^2r^2-\frac{x^4}{4}$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=2xr^2-x^3$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x=r\sqrt{2}$
	Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ dla $x \in (0;r\sqrt{2})$ oraz $f'(x)<0$ dla $x \in (r\sqrt{2};2r)$, więc w przedziale $(0;r\sqrt{2}\rangle$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $\langle r\sqrt{2};2r)$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $x=r\sqrt{2}$ funkcja f przyjmuje wartość największą, co oznacza, że funkcja P również przyjmuje wartość największą dla $x=r\sqrt{2}$
	Wyznaczenie długości y: $y=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ oraz długości przekątnej prostokąta: $d=\frac{r\sqrt{10}}{2}$
	Wykorzystanie twierdzenia cosinusów do obliczenia cosinusa kąta rozwartego zawartego między przekątnymi tego prostokąta: $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$
19.	Oznaczenie wysokości trójkątów DEF i ABC odpowiednio przez h i H oraz $x=\lvert DE\rvert$. Zauważenie, że na podstawie cechy KKK trójkąty ABC i DEC są podobne, więc $\frac{H-h}{H}=\frac{x}{a}$, stąd $h=\frac{H(a-x)}{a}$
	Wyznaczenie stosunku objętości stożków: $V_1 : V_2=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{H(a-x)}{a} : \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 H$
	Zapisanie stosunku objętości stożków jako funkcji zmiennej x: $f(x)=\frac{x^2a-x^3}{a^3}$, gdzie $x \in (0;a)$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\frac{2ax-3x^2}{a^3}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
19. cd.	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x=\frac{2a}{3}$
	Stwierdzenie, że $f'(x)>0$ dla $x\in\left(0;\frac{2a}{3}\right)$ oraz $f'(x)<0$ dla $x\in\left(\frac{2a}{3};a\right)$, więc dla $x=\frac{2a}{3}$ funkcja f przyjmuje wartość największą
20.	Zauważenie, że szukana prosta ma postać: $y=ax+9-a$, gdzie $a<0$, a punkty jej przecięcia z osiami układu współrzędnych mają współrzędne: $(0,9-a)$ i $\left(\frac{a-9}{a},0\right)$
	Zapisanie sumy długości odcinków jako funkcji zmiennej a: $f(a)=9-a+\frac{a-9}{a}=-a-\frac{9}{a}-10$
	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(a)=\frac{9}{a^2}-1$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej dla $a<0$: $a=-3$
	Stwierdzenie, że $f'(a)>0$ dla $a\in(-3;0)$ oraz $f'(a)<0$ dla $a\in(-\infty;-3)$, więc w przedziale $\langle-3;0)$ funkcja f jest rosnąca i w przedziale $(-\infty;-3\rangle$ jest malejąca. Wynika stąd, że dla $a=-3$ funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą
	Wyznaczenie równania szukanej prostej: $y=-3x+12$
21.	Wyznaczenie długości odcinka AB: $\lvert AB\rvert=\sqrt{5}$ oraz równania prostej AB: $x+2y+6=0$
	Wyznaczenie odległości punktu $C\left(x,\frac{4}{x}\right)$, gdzie $x>0$, od prostej AB: $d=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(x+\frac{8}{x}+6\right)$
	Zapisanie pola trójkąta jako funkcji zmiennej x: $P(x)=\frac{1}{2}x+\frac{4}{x}+3$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{x^2}$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej dla $x>0$: $x=2\sqrt{2}$
	Stwierdzenie, że $P'(x)>0$ dla $x\in(2\sqrt{2};\infty)$ oraz $P'(x)<0$ dla $x\in(0;2\sqrt{2})$, więc dla $x=2\sqrt{2}$ funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą, oraz podanie współrzędnych punktu C: $C(2\sqrt{2},\sqrt{2})$
22.	Zauważenie, że dla pewnego $x\in(0;4)$ wierzchołki prostokąta mają współrzędne: $C\left(x,\frac{1}{4}x^2\right)$, $D(x,4)$, $E(-x,4)$, $F\left(-x,\frac{1}{4}x^2\right)$, zatem długości boków prostokąta są równe: $4-\frac{1}{4}x^2$ oraz $2x$
	Zapisanie pola prostokąta jako funkcji zmiennej x: $P(x)=8x-\frac{1}{2}x^3$
	Obliczenie pochodnej funkcji P: $P'(x)=8-\frac{3}{2}x^2$
	Obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$
	Stwierdzenie, że $P'(x)>0$ dla $x\in\left(0;\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $P'(x)<0$ dla $x\in\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};4\right)$, więc dla $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ funkcja P przyjmuje wartość największą
	Wyznaczenie długości boków prostokąta: $2\frac{2}{3}$, $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania
23.	Wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = -3x^2 + 2(a+1)x + 12$
	Zauważenie, że miejsca zerowe pochodnej są liczbami przeciwnymi, i skorzystanie ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = 0 = \frac{-2(a+1)}{-3}$, czyli $a = -1$
	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x = -2$, $x = 2$
	Zauważenie, że dla $x = -2$ funkcja f osiąga minimum, a dla $x = 2$ – maksimum
	Zauważenie, że $f(-2) = -f(2)$, zatem $b = 0$
	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B: $A(-2, -16)$, $B(2, 16)$
24.	Wykonanie rysunku przekroju osiowego stożka 
	Skorzystanie z twierdzenia Pitagorasa i wyznaczenie r w zależności od h: $h^2 = (10-r)^2 - r^2 = 100 - 20r$, czyli $r = 5 - \frac{1}{20}h^2$, $h \in (0; 10)$
	Zapisanie funkcji objętości: $$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5\right)$$
	Wyznaczenie pochodnej: $$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{80}h^4 - \frac{3}{2}h^2 + 25\right)$$ oraz zapisanie warunku $$V'(h) = 0, \text{ gdy } h^4 - 120h^2 + 2000 = 0$$
	Wprowadzenie niewiadomej pomocniczej: $t = h^2$ i rozwiązanie równania kwadratowego $t^2 - 120t + 2000 = 0$: $t_1 = 20$, $t_2 = 100$
	Uwzględnienie założenia $h \in (0; 10)$ i podanie rozwiązania: $h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ oraz $r = 4$
	Obliczenie objętości stożka: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 20 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{40}{3}\pi\sqrt{5}$