

Asymptoty

Na prezentacji omówione zostaną przykłady znajdowania asymptot różnych funkcji.

Wprowadzenie

Przeanalizujemy trzy funkcje. Najpierw narysujemy je w programie www.desmos.com/calculator i na wykresie zobaczymy asymptoty. Później obliczymy równania asymptot algebraicznie.

Wprowadzenie

Przeanalizujemy trzy funkcje. Najpierw narysujemy je w programie www.desmos.com/calculator i na wykresie zobaczymy asymptoty. Później obliczymy równania asymptot algebraicznie.

Najpierw jednak przypomnijmy kiedy mamy do czynienia z asymptotami.

Asymptota pionowa

Z asymptotą pionową mamy do czynienia, gdy spełniony jest jeden z czterech warunków:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

W każdym z tych przypadków funkcja $f(x)$ będzie miała asymptotę pionową $x = a$.

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a , z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a , z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład:

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a , z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a , z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę pionową $x = 1$, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

Asymptota pionowa

W praktyce, ponieważ chcemy, by nasza funkcja dążyła do $\pm\infty$, gdy x dąży do a , z asymptotą pionową będziemy mieli do czynienia, gdy mamy ułamek, w którym mianownik jest równy 0, a licznik jest różny od 0.

Prosty przykład: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę pionową $x = 1$, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$$

To już nam wystarczy, by stwierdzić, że jest asymptota pionowa w $x = 1$, ale możemy jeszcze dodać, że mamy jeszcze:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu:

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę poziomą $y = 2$, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

Asymptota pozioma

Asymptoty poziome i ukośne to proste, do których dąży dana funkcja, gdy x dąży do nieskończoności lub minus nieskończoności. Funkcja ma asymptotę poziomą $y = a$ jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Wróćmy do prostego przykładu: $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Ta funkcja ma asymptotę poziomą $y = 2$, gdyż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

Dodajmy, że mamy również

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x+1}x + 2x + 3x + 4$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome. Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$.

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x+1}x + 2x + 3x + 4$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome. Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$. Ta funkcja ma asymptoty poziome $y = 1$ (prawa, gdy $x \rightarrow \infty$) oraz $y = -1$ (lewa, gdy $x \rightarrow -\infty$).

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x+1}x + 2x + 3x + 4$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome. Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$. Ta funkcja ma asymptoty poziome $y = 1$ (prawa, gdy $x \rightarrow \infty$) oraz $y = -1$ (lewa, gdy $x \rightarrow -\infty$). Mamy

bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

Asymptota pozioma

Funkcja może mieć dowolnie wiele asymptot pionowych (np. funkcja $f(x) = \frac{1}{x+1}x + 2x + 3x + 4$ ma cztery asymptoty pionowe: $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$), ale może mieć maksymalnie dwie asymptoty poziome. Przykładem funkcji, która ma dwie asymptoty poziome jest funkcja $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$. Ta funkcja ma asymptoty poziome $y = 1$ (prawa, gdy $x \rightarrow \infty$) oraz $y = -1$ (lewa, gdy $x \rightarrow -\infty$). Mamy

bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

Warto tę funkcję narysować na www.desmos.com/calculator.

Asymptoty ukośne

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji $f(x)$ jeśli spełniony jest co najmniej jeden z poniższych warunków:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Czyli jak x dąży do nieskończoności (lub minus nieskończoności) to różnica wartości między naszą funkcją a funkcją liniową $ax + b$ dąży do 0. Czyli nasza funkcja dąży do funkcji liniowej.

Asymptoty ukośne

W praktyce asymptot ukośnych będziemy szukali w dwóch krokach.
Pierwszy krok to znalezienie a :

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Gdy już mamy a , to szukamy b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

Oczywiście powinniśmy sprawdzić też asymptotę, jak $x \rightarrow -\infty$ (chyba, że widać, że znak nie ma żadnego znaczenia w obliczeniach)

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik = 0, licznik \neq 0.

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik = 0, licznik \neq 0. Tutaj ważna uwaga: gdy w ułamku otrzymujemy $\frac{0}{0}$, to nie możemy **niczego** wywnioskować, trzeba coś uprościć lub inaczej policzyć.

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik = 0, licznik \neq 0. Tutaj ważna uwaga: gdy w ułamku otrzymujemy $\frac{0}{0}$, to nie możemy **niczego** wywnioskować, trzeba coś uprościć lub inaczej policzyć.

To, czy mamy asymptotę poziomą, ukośną, czy żadną z nich można łatwo sprawdzić analizując potęgę x . Musimy ograniczyć się jedynie do najwyższej potęgi x . Jeśli potęga x wychodzi 1 to będziemy mieli asymptotę ukośną. Jeśli potęga jest mniejsza od 0, to mamy asymptotę poziomą. W każdym innym przypadku nie będzie asymptoty poziomej/ukośnej.

Kiedy mamy asymptoty

O asymptotach pionowych już powiedzieliśmy - mamy je wtedy, gdy mianownik = 0, licznik $\neq 0$. Tutaj ważna uwaga: gdy w ułamku otrzymujemy $\frac{0}{0}$, to nie możemy **niczego** wywnioskować, trzeba coś uprościć lub inaczej policzyć.

To, czy mamy asymptotę poziomą, ukośną, czy żadną z nich można łatwo sprawdzić analizując potęgę x . Musimy ograniczyć się jedynie do najwyższej potęgi x . Jeśli potęga x wychodzi 1 to będziemy mieli asymptotę ukośną. Jeśli potęga jest mniejsza od 0, to mamy asymptotę poziomą. W każdym innym przypadku nie będzie asymptoty poziomej/ukośnej. Jeśli to jest niejasne, to mogę to jeszcze wyjaśnić na zajęciach.

Przykład 1

Zacznijmy od funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

Przykład 1

Zacznijmy od funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

Sprawdzamy granicę, gdy $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+} \right] = \infty$$

A więc funkcja będzie miała asymptotę pionową $x = 1$.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x} = 1$$

Przykład 1

Zacznijmy od funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

Sprawdzamy granicę, gdy $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \left[\frac{2}{0^+} \right] = \infty$$

A więc funkcja będzie miała asymptotę pionową $x = 1$.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x} = 1$$

Teraz obliczamy b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 6}{x - 1} = 4$$

Czyli mamy asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \rightarrow -\infty$ otrzymamy te same wyniki).

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \rightarrow -\infty$ otrzymamy te same wyniki). Ostatecznie mamy jedną asymptotę pionową $x = 1$ oraz jedną asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \rightarrow -\infty$ otrzymamy te same wyniki). Ostatecznie mamy jedną asymptotę pionową $x = 1$ oraz jedną asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Warto teraz narysować wykres tej funkcji na www.desmos.com/calculator.

Przykład 1

Dodajmy, że będzie tylko jedna asymptota ukośna (gdyż licząc granice $x \rightarrow -\infty$ otrzymamy te same wyniki). Ostatecznie mamy jedną asymptotę pionową $x = 1$ oraz jedną asymptotę ukośną $y = x - 4$.

Warto teraz narysować wykres tej funkcji na www.desmos.com/calculator.
Najlepiej narysować $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$ oraz asymptoty $x = 1$ i $y = x - 4$.

Przykład 2

Przeanalizujemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$

Przykład 2

Przeanalizujemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$

Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdźmy granice $x \rightarrow -2$ oraz $x \rightarrow 2$

Przykład 2

Przeanalizujemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$

Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdźmy granice $x \rightarrow -2$ oraz $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$.

Przykład 2

Przeanalizujemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$

Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdźmy granice $x \rightarrow -2$ oraz $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$. Uwaga: nie musiałem analizować osobno przypadku $x \rightarrow -2^-$ i $x \rightarrow -2^+$. Wychodzi to samo.

Przykład 2

Przeanalizujemy asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$

Mamy potencjalnie dwie asymptoty pionowe. Sprawdźmy granice $x \rightarrow -2$ oraz $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{-x-2} = -2$$

Czyli nie ma asymptoty pionowej w $x = -2$. Uwaga: nie musiałem analizować osobno przypadku $x \rightarrow -2^-$ i $x \rightarrow -2^+$. Wychodzi to samo. Druga uwaga: ponieważ $x \rightarrow -2$, to x jest ujemny, a więc $|x|$ zmienia znak.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+4}{|x|-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+4}{x-2} = \left[\frac{8}{0^-} \right] = -\infty$$

Czyli mamy pionową asymptotę w $x = 2$.

Przykład 2

Analizując potęgi x , dochodzimy do wniosku, że będą też poziome asymptoty. Policzmy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{|x| - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{x - 2} = 2$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 2$ (prawą, dla $x \rightarrow \infty$).

Przykład 2

Analizując potęgi x , dochodzimy do wniosku, że będą też poziome asymptoty. Policzmy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{|x| - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{x - 2} = 2$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 2$ (prawą, dla $x \rightarrow \infty$). Policzmy też co się dzieje, gdy $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{|x| - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 4}{-x - 2} = -2$$

Mamy więc drugą poziomą asymptotę $y = -2$ (lewą, dla $x \rightarrow -\infty$).

Przykład 2

Podsumowując: funkcja $f(x) = \frac{2x+4}{|x|-2}$ ma jedną pionową asymptotę $x = 2$ oraz dwie poziome asymptoty $y = -2$ i $y = 2$. Warto ją narysować w programie, by zobaczyć, jak wygląda jej wykres.

Przykład 3

Teraz bardziej skomplikowana funkcja: $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & x < -2 \\ \frac{x+2}{x-1} & -2 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2+3x+1}{x+2} & x > 3 \end{cases}$

Najpierw asymptoty pionowe. Jedynek kandydat to $x = 1$ (czy wiadomo dlaczego tylko $x = 1$? Jeśli nie, to proszę o to dopytać na zajęciach).

Przykład 3

Teraz bardziej skomplikowana funkcja: $f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x} & x < -2 \\ \frac{x+2}{x-1} & -2 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2+3x+1}{x+2} & x > 3 \end{cases}$

Najpierw asymptoty pionowe. Jedynek kandydat to $x = 1$ (czy wiadomo dlaczego tylko $x = 1$? Jeśli nie, to proszę o to dopytać na zajęciach).

Sprawdzamy

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = \infty$$

Czyli mamy pionową asymptotę $x = 1$.

Przykład 3

Gdy $x \rightarrow -\infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{6}{x}$, a tu będzie pozioma asymptota. Obliczamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Przykład 3

Gdy $x \rightarrow -\infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{6}{x}$, a tu będzie pozioma asymptota. Obliczamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 0$ (lewą, gdy $x \rightarrow -\infty$).

Przykład 3

Gdy $x \rightarrow -\infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{6}{x}$, a tu będzie pozioma asymptota. Obliczamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Czyli mamy poziomą asymptotę $y = 0$ (lewą, gdy $x \rightarrow -\infty$).

Gdy $x \rightarrow \infty$, to będziemy stosowali wzór $\frac{x^2+3x+1}{x+2}$, a tu będzie ukośna asymptota. Będzie miała wzór $y = ax + b$. Obliczamy a :

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x} = 1$$

Czyli $a = 1$. Obliczamy teraz b :

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{x + 2} = 1$$

Przykład 3

Ostatecznie mamy pionową asymptotę $x = 1$, poziomą asymptotę $y = 0$ oraz ukośną asymptotę $y = x + 1$.

Przykład 3

Ostatecznie mamy pionową asymptotę $x = 1$, poziomą asymptotę $y = 0$ oraz ukośną asymptotę $y = x + 1$. Warto narysować wykres. W desmos wpisujemy: $f(x) = \left\{ x < -2 : \frac{6}{x}, -2 \leq x \leq 3 : \frac{x+2}{x-1}, x > 3 : \frac{x^2+3x+1}{x+2} \right\}$
Warto dopisać też równania asymptot.