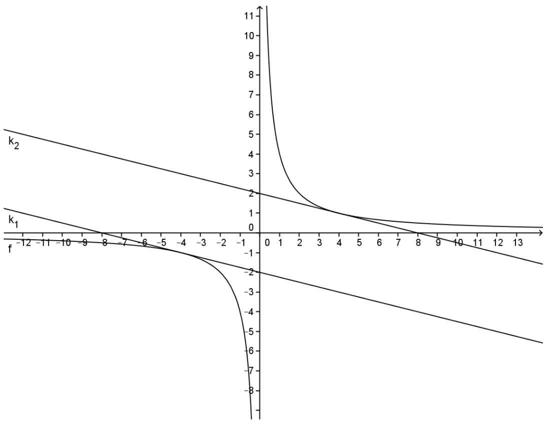
Odpowiedzi

Elementy analizy matematycznej

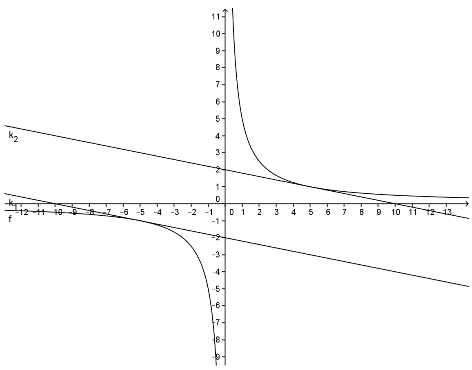
Praca klasowa nr 1, grupa A

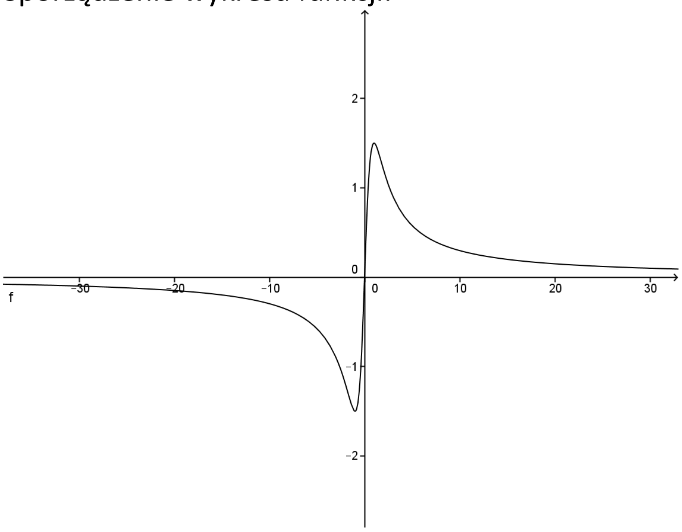
1.	Obliczenie granic $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ oraz stwierdzenie braku asymptoty poziomej.	2 pkt	7 pkt
	Obliczenie granic $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ oraz zapisanie równania asymptoty pionowej: $x = 0$.	2 pkt	
	Obliczenie granic $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 3x] = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - 3x] = 0$ oraz zapisanie równania asymptoty ukośnej: $y = 3x$.	3 pkt	
2.	Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = x^3 - 2x^2 - x$ i zapisanie jej w postaci iloczynu: $f'(x) = x(3x + 1)(x - 1)$.	2 pkt	6 pkt
	Obliczenie $f(0) = 0$, $f(1) = -\frac{5}{12}$, $f(2) = 4\frac{2}{3}$.	3 pkt	
	Określenie zbioru wartości funkcji $ZW_f = \langle -\frac{5}{12}, 4\frac{2}{3} \rangle$.	1 pkt	
3.	Wyznaczenie dziedziny: $D_f = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ i zapisanie wzoru funkcji: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$.	2 pkt	6 pkt
	Obliczenie pochodnej $f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 14}{(x-4)^2}$ ($D_{f'} = D_f$) i rozwiązanie nierówności: $f'(x) > 0$ i $x \in D_{f'}$: $x \in (-\infty, 2) \cup (4 + \sqrt{2}, +\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ i $x \in D_{f'}$: $x \in (4, 4 + \sqrt{2})$.	3 pkt	
	Zapisanie odpowiedzi: funkcja rośnie w każdym z przedziałów: $(-\infty, 2)$, $\langle 4 + \sqrt{2}, +\infty)$, funkcja maleje w przedziale: $(4, 4 + \sqrt{2} \rangle$.	1 pkt	
4.	a) Obliczenie pochodnej: $f'(x) = -\frac{1}{4x^2}$ (1 pkt); wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a = -\frac{1}{4}$ (1 pkt); wyznaczenie punktów styczności: $A(4, 1)$ i $B(-4, -1)$ (1 pkt); wyznaczenie równań stycznych: $y = -\frac{1}{4}x + 2$ w punkcie A, $y = -\frac{1}{4}x - 2$ w punkcie B (1 pkt).	4 pkt	6 pkt
	b)	2 pkt	

			
5.	Obliczenie granicy: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$.	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie $f(2) = 4a - 3$.	1 pkt	
	Wyznaczenie wartości parametru a: $a = \frac{1}{2}$.	2 pkt	

Praca klasowa nr 1, grupa B

1.	Obliczenie granic $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ oraz stwierdzenie braku asymptoty poziomej.	2 pkt	7 pkt
	Obliczenie granic $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ oraz zapisanie równania asymptoty pionowej: $x = 0$.	2 pkt	
	Obliczenie granic $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 2x] = 0$ oraz zapisanie równania asymptoty ukośnej: $y = 2x$.	3 pkt	
2.	Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = 5x^3 + 4x^2 - x$ i zapisanie jej w postaci iloczynu: $f'(x) = x(5x - 1)(x + 1)$.	2 pkt	6 pkt
	Obliczenie $f(0) = 0$, $f(-1) = -\frac{7}{12}$, $f(-2) = 7\frac{1}{3}$.	3 pkt	
	Określenie zbioru wartości funkcji $ZW_f = \langle -\frac{7}{12}, 7\frac{1}{3} \rangle$.	1 pkt	
3.	Wyznaczenie dziedziny $D_f = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ i zapisanie	2 pkt	6 pkt

	wzoru funkcji: $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 5}$.		
	Obliczenie pochodnej $f'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 23}{(x-5)^2}$ ($D_{f'} = D_f$) i rozwiązanie nierówności: $f'(x) > 0$ i $x \in D_{f'}$: $x \in (-\infty, 3) \cup \langle 5 + \sqrt{2}, +\infty)$ oraz $f'(x) < 0$ i $x \in D_{f'}$: $x \in (5, 5 + \sqrt{2}\,\rangle$.	3 pkt	
	Zapisanie odpowiedzi: funkcja rośnie w każdym z przedziałów: $(-\infty, 3)$, $(5 + \sqrt{2}, +\infty)$, funkcja maleje w przedziale: $(5, 5 + \sqrt{2})$.	1 pkt	
4.	a) Obliczenie pochodnej: $f'(x) = -\dfrac{1}{5x^2}$ (1 pkt); wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a = -\dfrac{1}{5}$ (1 pkt); wyznaczenie punktów styczności: $A(5, 1)$ i $B(-5, -1)$ (1 pkt); wyznaczenie równań stycznych: $y = -\dfrac{1}{5}x + 2$ w punkcie A, $y = -\dfrac{1}{5}x - 2$ w punkcie B (1 pkt).	4 pkt	6 pkt
	b) 	2 pkt	
5.	Obliczenie granicy: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$.	2 pkt	5 pkt
	Obliczenie $f(2) = 9a - 1$.	1 pkt	
	Wyznaczenie wartości parametru a: $a = \dfrac{1}{3}$.	2 pkt	

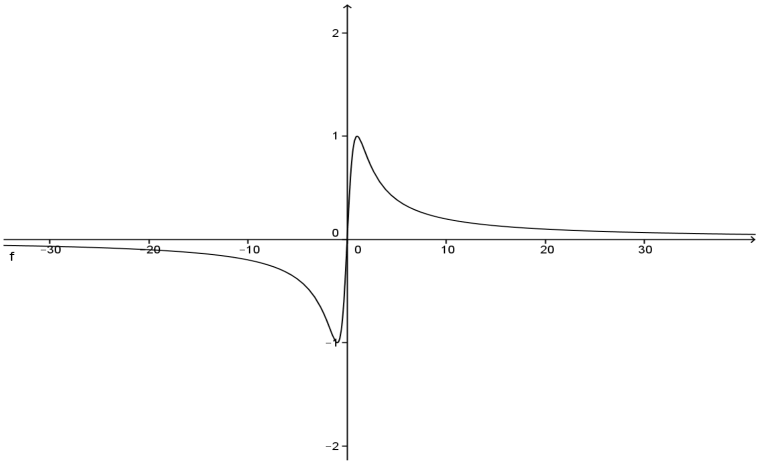
<table>
<tr><td rowspan="3">1.</td><td>Ułożenie równania wielomianowego i zapisanie go w postaci $(x-2)(x^2+x+1)=0$, wyznaczenie $x_0=2$.</td><td>3 pkt</td><td rowspan="3">7 pkt</td></tr>
<tr><td>Wyznaczenie funkcji pochodnej: $f'(x)=3x^2-2x-1$ i obliczenie $f'(2)=7$.</td><td>2 pkt</td></tr>
<tr><td>Zapisanie równania stycznej $y=7x-13$.</td><td>2 pkt</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2.</td><td>Zapisanie wzoru funkcji $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{dla } x\in(-\infty,-3\rangle \\ x+2 & \text{dla } x\in(-3,2) \\ 4 & \text{dla } x\in\langle 2,+\infty)\end{cases}$.</td><td>2 pkt</td><td rowspan="4">7 pkt</td></tr>
<tr><td>Stwierdzenie, że $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=-2 \neq \lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=-1$.</td><td>2 pkt</td></tr>
<tr><td>Stwierdzenie, że $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=4=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ oraz $f(2)=4$.</td><td>2 pkt</td></tr>
<tr><td>Podanie odpowiedzi, że punktem nieciągłości jest $x_0=-3$.</td><td>1 pkt</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3.</td><td>Wyznaczenie dziedziny: $D=\boldsymbol{R}$; obliczenie granic: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, zapisanie równania asymptoty poziomej: $y=0$.</td><td>2 pkt</td><td rowspan="4">9 pkt</td></tr>
<tr><td>Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ oraz określenie jej znaku: $f'(x)>0$, gdy $x\in(-1, 1)$,
i $f'(x)<0$, gdy $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.</td><td>3 pkt</td></tr>
<tr><td>Sporządzenie tabeli przebiegu:
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-1)$</td><td>-1</td><td>$(-1, 1)$</td><td>1</td><td>$(1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>min. lok. = –1</td><td>↗</td><td>max. lok. = 1</td><td>↘</td></tr>
</table></td><td>2 pkt</td></tr>
<tr><td>Sporządzenie wykresu funkcji:

</td><td>2 pkt</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Zapisanie pola trójkąta w zależności od długości jednej z przyprostokątnych, np. $P(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$ i $x\in(0, 6)$.</td><td>2 pkt</td><td>7 pkt</td></tr>
</table>

	Zapisanie wzoru w postaci: $P(x)=\sqrt{9x^2-\frac{1}{4}x^4}$.	1 pkt	
	Analiza funkcji podpierwiastkowej: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 9x^2$ i $x \in (0, 6)$, obliczenie pochodnej: $f'(x) = -x^3 + 18x$ i $x \in (0, 6)$, wyznaczenie szukanej długości $x = 3\sqrt{2}$.	3 pkt	
	Obliczenie drugiej przyprostokątnej ($3\sqrt{2}$) oraz pola $P = 9$.	1 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa B

1.	Ułożenie równania wielomianowego i zapisanie go w postaci $(x-2)(x^2-x+1)=0$, wyznaczenie $x_0 = 2$.	3 pkt	7 pkt
	Wyznaczenie funkcji pochodnej: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ oraz obliczenie $f'(2) = 3$.	2 pkt	
	Zapisanie równania stycznej $y = 3x - 5$.	2 pkt	
2.	Zapisanie wzoru funkcji $f(x)=\begin{cases} -4 & \text{dla } x\in(-\infty,-4\rangle \\ x+3 & \text{dla } x\in(-4,\ 3) \\ 6 & \text{dla } x\in\langle 3,+\infty) \end{cases}$.	2 pkt	7 pkt
	Stwierdzenie, że $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=-4 \neq \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=-1$.	2 pkt	
	Stwierdzenie, że $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ oraz $f(3) = 6$.	2 pkt	
	Podanie odpowiedzi, że punktem nieciągłości jest $x_0 = -4$.	1 pkt	
3.	Wyznaczenie dziedziny: $D = \boldsymbol{R}$; obliczenie granic: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, zapisanie równania asymptoty poziomej: $y = 0$.	2 pkt	9 pkt
	Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$ oraz określenie jej znaku: $f'(x) > 0$, gdy $x \in (-1, 1)$, i $f'(x) < 0$, gdy $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.	3 pkt	
	Sporządzenie tabeli przebiegu: (tabela poniżej)	2 pkt	
	Sporządzenie wykresu funkcji:	2 pkt	

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min. lok. = –1,5	$\nearrow$	max. lok. = 1,5	$\searrow$

			
4.	Zapisanie pola trójkąta w zależności od długości jednej z przyprostokątnych, np. $P(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$ i $x \in (0, 10)$.	2 pkt	7 pkt
	Zapisanie wzoru w postaci $P(x) = \sqrt{25x^2 - \frac{1}{4}x^4}$.	1 pkt	
	Analiza funkcji podpierwiastkowej: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 50x^2$ i $x \in (0, 10)$, obliczenie pochodnej: $f'(x) = -x^3 + 50x$ i $x \in (0, 10)$, wyznaczenie szukanej długości $x = 5\sqrt{2}$.	3 pkt	
	Obliczenie drugiej przyprostokątnej ($5\sqrt{2}$) oraz pola $P = 25$.	1 pkt	