

Pochodna funkcji w punkcie

Na prezentacji omówione zostaną przykłady obliczania pochodnej danej funkcji w punkcie.

Wprowadzenie

Intuicyjne rozumienie jest proste - pochodna funkcji opisuje tempo zmiany danej funkcji. W przypadku funkcji liniowych to tempo zmiany jest stałe, natomiast inne funkcje mają różne tempo zmiany w zależności od argumentu.

Wprowadzenie

Intuicyjne rozumienie jest proste - pochodna funkcji opisuje tempo zmiany danej funkcji. W przypadku funkcji liniowych to tempo zmiany jest stałe, natomiast inne funkcje mają różne tempo zmiany w zależności od argumentu.

Przykładowo funkcja $f(x) = x^2$ rośnie szybko, gdy $x = 2$, rośnie wolno, gdy $x = \frac{1}{2}$, jest stała, gdy $x = 0$, maleje wolno, gdy $x = -\frac{1}{2}$ i maleje szybko, gdy $x = -2$.

Wprowadzenie

Intuicyjne rozumienie jest proste - pochodna funkcji opisuje tempo zmiany danej funkcji. W przypadku funkcji liniowych to tempo zmiany jest stałe, natomiast inne funkcje mają różne tempo zmiany w zależności od argumentu.

Przykładowo funkcja $f(x) = x^2$ rośnie szybko, gdy $x = 2$, rośnie wolno, gdy $x = \frac{1}{2}$, jest stała, gdy $x = 0$, maleje wolno, gdy $x = -\frac{1}{2}$ i maleje szybko, gdy $x = -2$.

W związku z powyższym funkcja $f(x) = x^2$, będzie miała inną wartość pochodnej dla każdej z tych wartości.

Definicja

Pochodną funkcji $f(x)$ dla $x = x_0$ zapisujemy $f'(x_0)$ i definiujemy następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definicja

Pochodną funkcji $f(x)$ dla $x = x_0$ zapisujemy $f'(x_0)$ i definiujemy następująco:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tutaj uwaga: by pochodna w danym punkcie istniała, to powyższa granica musi istnieć, a więc musimy mieć:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$.

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$.

Mamy do czynienia z funkcją liniową, więc pochodna powinna wyjść 2 w każdym punkcie, bo tempo zmiany tej funkcji jest stałe. Przekonajmy się, że tak rzeczywiście jest:

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$.

Mamy do czynienia z funkcją liniową, więc pochodna powinna wyjść 2 w każdym punkcie, bo tempo zmiany tej funkcji jest stałe. Przekonajmy się, że tak rzeczywiście jest: (Spróbuj najpierw samodzielnie)

Przykład 1

Zacznijmy od prostego przykładu $f(x) = 2x + 3$. Będziemy chcieli obliczyć wartość pochodnej w punkcie $x_0 = 3$.

Mamy do czynienia z funkcją liniową, więc pochodna powinna wyjść 2 w każdym punkcie, bo tempo zmiany tej funkcji jest stałe. Przekonajmy się, że tak rzeczywiście jest: (Spróbuj najpierw samodzielnie)

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h) + 3 - (2 \cdot 3 + 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Przykład 2

Obliczmy pochodną $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ dla $x = 1$

Przykład 2

Obliczmy pochodną $f(x) = \sqrt{2x+1}$ dla $x = 1$ (Spróbuj najpierw samodzielnie)

Przykład 2

Obliczmy pochodną $f(x) = \sqrt{2x+1}$ dla $x = 1$ (Spróbuj najpierw samodzielnie)

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(1+h)+1} - \sqrt{2 \cdot 1 + 1}}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2h} - \sqrt{3}}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3+2h-3}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Przykład 3

Obliczmy pochodną $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ dla $x = 2$

Przykład 3

Obliczmy pochodną $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ dla $x = 2$ (Spróbuj najpierw samodzielnie)

Przykład 3

Obliczmy pochodną $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ dla $x = 2$ (Spróbuj najpierw samodzielnie)

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3+h}{1+h} - \frac{3}{1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3+h}{1+h} - \frac{3+3h}{1+h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-2h}{1+h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{1+h} = -2 \end{aligned}$$

We wszystkich powyższych przykładach obliczaliśmy pochodną licząc granicę, gdy $h \rightarrow 0$. Nie przejmowaliśmy się, czy $h \rightarrow 0^+$, czy $h \rightarrow 0^-$, gdyż znak h nie miał żadnego wpływu na otrzymywany wynik.

We wszystkich powyższych przykładach obliczaliśmy pochodną licząc granicę, gdy $h \rightarrow 0$. Nie przejmowaliśmy się, czy $h \rightarrow 0^+$, czy $h \rightarrow 0^-$, gdyż znak h nie miał żadnego wpływu na otrzymywany wynik.

Przeanalizujemy teraz kilka przykładów, gdy musimy sprawdzić lewostronną i prawostronną granicę.

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$. Na zajęciach, na podstawie wykresu ustaliliśmy, że ta pochodna nie istnieje. Sprawdźmy to algebraicznie:

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$. Na zajęciach, na podstawie wykresu ustaliliśmy, że ta pochodna nie istnieje. Sprawdźmy to algebraicznie:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$. Na zajęciach, na podstawie wykresu ustaliliśmy, że ta pochodna nie istnieje. Sprawdźmy to algebraicznie:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

Natomiast:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1$$

Przykład 4

Obliczmy pochodną $f(x) = |x|$ dla $x = 0$. Na zajęciach, na podstawie wykresu ustaliliśmy, że ta pochodna nie istnieje. Sprawdźmy to algebraicznie:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 0}{h} = -1$$

Natomiast:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1$$

Czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

W związku z tym $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ nie istnieje (gdyż granice lewo- i prawostronne są różne), a więc $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej dla $x = 0$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+1}$, gdy $x = -1$.
Najpierw obliczymy granicę, gdy $h \rightarrow 0^-$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+1}$, gdy $x = -1$.
Najpierw obliczymy granicę, gdy $h \rightarrow 0^-$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|h|}{(-1+h)^2+1} - \frac{-1+1}{(-1)^2+1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-h}{h^2-2h+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow -1^-} \frac{-1}{h^2 - 2h + 2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Przykład 5

Podobnie obliczamy granicę, gdy $h \rightarrow 0^+$

Przykład 5

Podobnie obliczamy granicę, gdy $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|h|}{(-1+h)^2+1} - \frac{-1+1}{(-1)^2+1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-h}{h^2-2h+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow -1^-} \frac{1}{h^2 - 2h + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Przykład 5

Podobnie obliczamy granicę, gdy $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|h|}{(-1+h)^2+1} - \frac{-1+1}{(-1)^2+1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-h}{h^2-2h+2}}{h} = \lim_{h \rightarrow -1^-} \frac{1}{h^2 - 2h + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Granice są różne:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

a więc pochodna funkcji $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+1}$, gdy $x = -1$, nie istnieje.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,
gdy $x = 1$.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,

gdy $x = 1$. Tutaj mamy funkcję zdefiniowaną różnymi wzorami, więc

sprawdźmy najpierw, czy ta funkcja w ogóle jest ciągła w $x = 1$.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,
gdy $x = 1$. Tutaj mamy funkcję zdefiniowaną różnymi wzorami, więc

sprawdźmy najpierw, czy ta funkcja w ogóle jest ciągła w $x = 1$. Mamy:

$$f(1) = 1^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 1$$

Przykład 6

Sprawdzimy, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ 3x - 2 & x > 1 \end{cases}$,
gdy $x = 1$. Tutaj mamy funkcję zdefiniowaną różnymi wzorami, więc

sprawdźmy najpierw, czy ta funkcja w ogóle jest ciągła w $x = 1$. Mamy:

$$f(1) = 1^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 1$$

Wszystkie wartości są sobie równe, czyli funkcja jest ciągła w $x = 1$.

Przykład 6

Teraz sprawdzamy pochodną. Sprawdźmy najpierw dla $h \rightarrow 0^-$:

Przykład 6

Teraz sprawdzamy pochodną. Sprawdźmy najpierw dla $h \rightarrow 0^-$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (3 + 3h + h^2) = 3 \end{aligned}$$

Przykład 6

Sprawdzamy dla $h \rightarrow 0^+$:

Przykład 6

Sprawdzamy dla $h \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h) - 2 - 1^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 + 3h - 2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 = 3 \end{aligned}$$

Przykład 6

Sprawdzamy dla $h \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h) - 2 - 1^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3 + 3h - 2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 3 = 3 \end{aligned}$$

Funkcja jest ciągła, granice się zgadzają, a więc pochodna dla $x = 1$ istnieje i ma wartość 3, czyli $f'(1) = 3$.