Materiały dodatkowe

Wprowadzenie

Na prezentacji zostaną omówione dwie dodatkowe rzeczy:

Wprowadzenie

Na prezentacji zostaną omówione dwie dodatkowe rzeczy:

- reguła de l'Hospitala,

Wprowadzenie

Na prezentacji zostaną omówione dwie dodatkowe rzeczy:

- reguła de l'Hospitala,
- pochodna funkcji złożonej.

Wprowadzenie

Na prezentacji zostaną omówione dwie dodatkowe rzeczy:

- reguła de l'Hospitala,
- pochodna funkcji złożonej.

Reguła de l'Hospitala pozwoli nam oszczędzić około 30 sekund przy obliczaniu granic, natomiast pochodna funkcji złożonej może się przydać, gdy utkniemy.

Reguła de l'Hospitala

Pamiętamy, że jeśli przy obliczaniu granicy wychodzi nam $\frac{0}{0}$, to musimy pokombinować. W praktyce trzeba będzie zapewne coś skrócić. Reguła de l'Hospitala może przyspieszyć ten proces. Brzmi ona następująco:

Reguła de l'Hospitala

Pamiętamy, że jeśli przy obliczaniu granicy wychodzi nam $\frac{0}{0}$, to musimy pokombinować. W praktyce trzeba będzie zapewne coś skrócić. Reguła de l'Hospitala może przyspieszyć ten proces. Brzmi ona następująco:

Jeśli $\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = 0$ oraz $\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = 0$ to

$$\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Czyli zamiast możemy wziąć pochodną licznika i mianownika i wtedy obliczyć granicę.

Reguła de l'Hospitala

Pamiętamy, że jeśli przy obliczaniu granicy wychodzi nam $\frac{0}{0}$, to musimy pokombinować. W praktyce trzeba będzie zapewne coś skrócić. Reguła de l'Hospitala może przyspieszyć ten proces. Brzmi ona następująco:

Jeśli $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ oraz $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Czyli zamiast możemy wziąć pochodną licznika i mianownika i wtedy obliczyć granicę.
Uwaga: to działa tylko w przypadku, gdy mamy $\frac{0}{0}$ (lub $\frac{\infty}{\infty}$).

Przykład 1

Przykład ze sprawdzianu:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4} = ?$$

Przykład 1

Przykład ze sprawdzianu:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4} =?$$

Mamy $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

Przykład 1

Przykład ze sprawdzianu:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4} = ?$$

Mamy $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x + 1}{2x - 4} = -\infty$$

Przykład 2

Drugi przykład ze sprawdzianu:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = ?$$

Przykład 2

Drugi przykład ze sprawdzianu:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = ?$$

Mamy $\frac{0}{0}$. Znów stosujemy regułę de l'Hospitala:

Przykład 2

Drugi przykład ze sprawdzianu:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = ?$$

Mamy $\frac{0}{0}$. Znów stosujemy regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x + 1}{2x - 3} = 5$$

Ta reguła w przypadkach, które mogą pojawić się na maturze, pozwoli zaoszczędzić troszkę (raczej niewiele) czasu. Jest ona jednak konieczna do obliczenia bardziej złożonych granic (np. z funkcjami trygonometrycznymi).

Pochodna funkcji złożonej

Rozważmy funkcję $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna funkcji złożonej

Rozważmy funkcję $f(x) = (x^2 + 3)^2$. Chcemy policzyć pochodną.

Pochodna funkcji złożonej

Rozważmy funkcję $f(x) = (x^2 + 3)^2$. Chcemy policzyć pochodną. Prosta sprawa - podnosimy do kwadratu i mamy prostą funkcję wielomianową.

Pochodna funkcji złożonej

Rozważmy funkcję $f(x) = (x^2 + 3)^2$. Chcemy policzyć pochodną. Prosta sprawa - podnosimy do kwadratu i mamy prostą funkcję wielomianową. Gdybyśmy mieli jednak funkcję $g(x) = (x^2 + 3)^5$, to już jest pewien problem (głównie związany z dużą liczbą koniecznych obliczeń).

Pochodna funkcji złożonej

Rozważmy funkcję $f(x) = (x^2 + 3)^2$. Chcemy policzyć pochodną. Prosta sprawa - podnosimy do kwadratu i mamy prostą funkcję wielomianową. Gdybyśmy mieli jednak funkcję $g(x) = (x^2 + 3)^5$, to już jest pewien problem (głównie związany z dużą liczbą koniecznych obliczeń). Całe szczęście jest na to sposób.

Pochodna funkcji złożonej

Wróćmy na chwilę do prostszej wersji $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna funkcji złożonej

Wróćmy na chwilę do prostszej wersji $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna $f'(x)$ opisuje to jak, zmienia się wartość funkcji w zależności od x.

Pochodna funkcji złożonej

Wróćmy na chwilę do prostszej wersji $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna $f'(x)$ opisuje to jak, zmienia się wartość funkcji w zależności od x.

Zróbmy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$. Otrzymaliśmy funkcję $f(t) = t^2$. Pochodna tej funkcji jest bardzo prosta $f'(t) = 2t$,

Pochodna funkcji złożonej

Wróćmy na chwilę do prostszej wersji $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna $f'(x)$ opisuje to jak, zmienia się wartość funkcji w zależności od x.

Zróbmy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$. Otrzymaliśmy funkcję $f(t) = t^2$. Pochodna tej funkcji jest bardzo prosta $f'(t) = 2t$, ale to nam mówi, jak zmienia się f w zależności od t.

Pochodna funkcji złożonej

Wróćmy na chwilę do prostszej wersji $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna $f'(x)$ opisuje to jak, zmienia się wartość funkcji w zależności od x.

Zróbmy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$. Otrzymaliśmy funkcję $f(t) = t^2$. Pochodna tej funkcji jest bardzo prosta $f'(t) = 2t$, ale to nam mówi, jak zmienia się f w zależności od t.

Wiemy jednak też jak zmienia się t w zależności od x. Ponieważ $t(x) = x^2 + 3$, to $t'(x) = 2x$.

Pochodna funkcji złożonej

Wróćmy na chwilę do prostszej wersji $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Pochodna $f'(x)$ opisuje to jak, zmienia się wartość funkcji w zależności od x.

Zróbmy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$. Otrzymaliśmy funkcję $f(t) = t^2$. Pochodna tej funkcji jest bardzo prosta $f'(t) = 2t$, ale to nam mówi, jak zmienia się f w zależności od t.

Wiemy jednak też jak zmienia się t w zależności od x. Ponieważ $t(x) = x^2 + 3$, to $t'(x) = 2x$.

W związku z tym $f'(x) = 2t \cdot 2x = 2(x^2 + 3) \cdot 2x$

Przykład 2

Przejdźmy do funkcji $g(x) = (x^2 + 3)^5$.

Przykład 2

Przejdźmy do funkcji $g(x) = (x^2 + 3)^5$.

Znów zrobimy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$ i otrzymujemy $g(t) = t^5$.

Przykład 2

Przejdźmy do funkcji $g(x) = (x^2 + 3)^5$.

Znów zrobimy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$ i otrzymujemy $g(t) = t^5$.

Mamy przy tym $t'(x) = 2x$ oraz $g'(t) = 5t^4$.

Przykład 2

Przejdźmy do funkcji $g(x) = (x^2 + 3)^5$.

Znów zrobimy podstawienie $t(x) = x^2 + 3$ i otrzymujemy $g(t) = t^5$.

Mamy przy tym $t'(x) = 2x$ oraz $g'(t) = 5t^4$.

Czyli $g'(x) = 5t^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 3)^4$

Zróbmy jeszcze jeden przykład $h(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2}$. Chcemy policzyć $h'(x)$.

Zróbmy jeszcze jeden przykład $h(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2}$. Chcemy policzyć $h'(x)$.

Znów zrobimy podstawienie $t(x) = x^3 - 2x^2$ i otrzymujemy $h(t) = \sqrt{t}$.

Zróbmy jeszcze jeden przykład $h(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2}$. Chcemy policzyć $h'(x)$.

Znów zrobimy podstawienie $t(x) = x^3 - 2x^2$ i otrzymujemy $h(t) = \sqrt{t}$.

Mamy przy tym $t'(x) = 3x^2 - 4x$ oraz $h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Zróbmy jeszcze jeden przykład $h(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2}$. Chcemy policzyć $h'(x)$.

Znów zrobimy podstawienie $t(x) = x^3 - 2x^2$ i otrzymujemy $h(t) = \sqrt{t}$.

Mamy przy tym $t'(x) = 3x^2 - 4x$ oraz $h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Czyli $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (3x^2 - 4) = \frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-2x^2}}$

Przykład ze sprawdzinu

Na sprawdzianie pojawiła się funkcja $P(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$.

Przykład ze sprawdzinu

Na sprawdzianie pojawiła się funkcja $P(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$. Część osób sobie doskonale z nią poradziła odpowiednio ją przekształcając i analizując funkcję pod pierwiastkiem, ale teraz możemy stanąć z właściwą funkcją twarzą w twarz.

Przykład ze sprawdzinu

Na sprawdzianie pojawiła się funkcja $P(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$. Część osób sobie doskonale z nią poradziła odpowiednio ją przekształcając i analizując funkcję pod pierwiastkiem, ale teraz możemy stanąć z właściwą funkcją twarzą w twarz.

Po pierwsze mamy iloczyn, więc musimy zastosować ten (pewnie już przez niektórych zapomniany) wzór:

$$P'(x) = (2x)'\sqrt{25 - x^2} + 2x(\sqrt{25 - x^2})' = 2\sqrt{25 - x^2} + 2x(\sqrt{25 - x^2})'$$

Przykład ze sprawdzinu

Na sprawdzianie pojawiła się funkcja $P(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$. Część osób sobie doskonale z nią poradziła odpowiednio ją przekształcając i analizując funkcję pod pierwiastkiem, ale teraz możemy stanąć z właściwą funkcją twarzą w twarz.

Po pierwsze mamy iloczyn, więc musimy zastosować ten (pewnie już przez niektórych zapomniany) wzór:

$$P'(x) = (2x)'\sqrt{25 - x^2} + 2x(\sqrt{25 - x^2})' = 2\sqrt{25 - x^2} + 2x(\sqrt{25 - x^2})'$$

Musimy jeszcze policzyć $(\sqrt{25 - x^2})'$.

Przykład ze sprawdzinu

Niech $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Przykład ze sprawdzinu

Niech $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
Zróbmy podstawienie $t(x) = 25 - x^2$, czyli $f(t) = \sqrt{t}$.

Przykład ze sprawdzinu

Niech $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
Zróbmy podstawienie $t(x) = 25 - x^2$, czyli $f(t) = \sqrt{t}$.

Mamy wtedy $t'(x) = -2x$ oraz $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Przykład ze sprawdzinu

Niech $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
Zróbmy podstawienie $t(x) = 25 - x^2$, czyli $f(t) = \sqrt{t}$.

Mamy wtedy $t'(x) = -2x$ oraz $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Czyli $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

Przykład ze sprawdzinu

Wracamy do przykładu:

$$P'(x) = 2\sqrt{25-x^2} + 2x(\sqrt{25-x^2})' = 2\sqrt{25-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{25-x^2}}$$

Przykład ze sprawdzinu

Wracamy do przykładu:

$$P'(x) = 2\sqrt{25 - x^2} + 2x(\sqrt{25 - x^2})' = 2\sqrt{25 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Udało się! Mamy obliczoną pochodną.

Przykład ze sprawdzinu

Wracamy do przykładu:

$$P'(x) = 2\sqrt{25-x^2} + 2x(\sqrt{25-x^2})' = 2\sqrt{25-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{25-x^2}}$$

Udało się! Mamy obliczoną pochodną. Teraz trzeba ją przyrównać do 0, by obliczyć ekstrema.

Przykład ze sprawdzinu

Wracamy do przykładu:

$$P'(x) = 2\sqrt{25-x^2} + 2x(\sqrt{25-x^2})' = 2\sqrt{25-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{25-x^2}}$$

Udało się! Mamy obliczoną pochodną. Teraz trzeba ją przyrównać do 0, by obliczyć ekstrema. Musimy sprowadzić do wspólnego mianownika itd. Ostatecznie otrzymujemy $50 - 4x^2 = 0$ i łatwo odnajdujemy maksimum dla $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Dodatkowe zadanie dla chętnych

Rozwiązując zadanie ze sprawdzianu w sposób zaprezentowany na powyższych slajdach wyszło nam, że funkcja pola ma dwa ekstrema. Maksimum dla $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (gdybyśmy zamienili w treści 25 na 36 to wyszłoby $x = 3\sqrt{2}$) oraz minimum dla $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (dla drugiej grupy $x = -3\sqrt{2}$). W Waszych rozwiązaniach wychodziły 3 ekstrema: maksimum dla $x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$ i minimum dla $x = 0$.

Dodatkowe zadanie dla chętnych

Rozwiązując zadanie ze sprawdzianu w sposób zaprezentowany na powyższych slajdach wyszło nam, że funkcja pola ma dwa ekstrema. Maksimum dla $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (gdybyśmy zamienili w treści 25 na 36 to wyszłoby $x = 3\sqrt{2}$) oraz minimum dla $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (dla drugiej grupy $x = -3\sqrt{2}$). W Waszych rozwiązaniach wychodziły 3 ekstrema: maksimum dla $x = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$ i minimum dla $x = 0$.

Przyznam dodatkowe 2 punkty osobie, która dokładnie wyjaśni, skąd bierze się ta rozbieżność i co tutaj nie zagrało.

Końcowy komentarz

Zarówno reguła de l'Hospitala i zasada dotycząca pochodnej funkcji złożonej nie zawierają się w podstawie programowej, a więc nie może pojawić się na maturze przykład, do którego konieczne byłoby ich wykorzystanie (tzn. zawsze będzie dało się policzyć/rozwiązać przykład korzystając z reguł i metod, które omawialiśmy na lekcji).