Wzory Viete'a

Trzeba umieć wyznaczyć liczbę rozwiązań rówanania kwadratowego w zależności od parametru.

Wprowadzenie

Rozważając równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ z parametrem (tzn. a, b i c zawierają jakiś parametr, np. m) musimy przeanalizować:

- współczynnik a - jeśli a jest 0 to mamy równanie liniowe $bx + c = 0$, musimy zbadać liczbę jego rozwiązań. Jeśli $a \neq 0$ to mamy równanie kwadratowe i możemy przejść do kolejnego punktu,
- wyróżnik Δ - jeśli $\Delta > 0$ to mamy dwa rozwiązania, jeśli $\Delta = 0$ to jest jedno rozwiązanie, jeśli $\Delta < 0$ to nie ma rozwiązań.

Przykład 1

Ustal liczbę rozwiązań równania:

$$(m-3)x^2 + mx - 2 = 0$$

w zależności od parametru m.

Przykład 1

Ustal liczbę rozwiązań równania:

$$(m-3)x^2 + mx - 2 = 0$$

w zależności od parametru m.

Krok 1. Sprawdzamy a. Jeśli $m = 3$ to $a = 0$ i równanie ma postać $3x - 2 = 0$. Równanie to ma jedno rozwiązanie.

Przykład 1

Ustal liczbę rozwiązań równania:

$$(m-3)x^2 + mx - 2 = 0$$

w zależności od parametru m.

Krok 1. Sprawdzamy a. Jeśli $m = 3$ to $a = 0$ i równanie ma postać $3x - 2 = 0$. Równanie to ma jedno rozwiązanie.

Krok 2. Jeśli $m \neq 3$, to $a \neq 0$ i sprawdzamy Δ.

$$\Delta = m^2 - 4(-2)(m-3) = m^2 + 8m - 24$$

Przykład 1 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty)$.

Przykład 1 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty)$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$.

Przykład 1 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty)$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (\frac{-8-4\sqrt{10}}{2}, \frac{-8+4\sqrt{10}}{2})$.

Przykład 1 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty)$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (\frac{-8-4\sqrt{10}}{2}, \frac{-8+4\sqrt{10}}{2})$.

Ostatecznie mamy:

- dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty) - \{3\}$.

Przykład 1 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty)$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (\frac{-8-4\sqrt{10}}{2}, \frac{-8+4\sqrt{10}}{2})$.

Ostatecznie mamy:

- dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty) - \{3\}$.
- jedno rozwiązanie dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$ oraz dla $m = 3$.

Przykład 1 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty)$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (\frac{-8-4\sqrt{10}}{2}, \frac{-8+4\sqrt{10}}{2})$.

Ostatecznie mamy:

- dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty, \frac{-8-4\sqrt{10}}{2}) \cup (\frac{-8+4\sqrt{10}}{2}, \infty) - \{3\}$.
- jedno rozwiązanie dla $m = \frac{-8 \pm 4\sqrt{10}}{2}$ oraz dla $m = 3$.
- brak rozwiązań dla $m \in (\frac{-8-4\sqrt{10}}{2}, \frac{-8+4\sqrt{10}}{2})$.

Przykład 2

Ustal liczbę rozwiązań równania:

$$(1-2m)x^2+3x-m=0$$

w zależności od parametru m.

Przykład 2

Ustal liczbę rozwiązań równania:

$$(1-2m)x^2+3x-m=0$$

w zależności od parametru m.

Krok 1. Sprawdzamy a. Jeśli $m=\frac{1}{2}$ to $a=0$ i równanie ma postać $3x-\frac{1}{2}=0$. Równanie to ma jedno rozwiązanie.

Przykład 2

Ustal liczbę rozwiązań równania:

$$(1-2m)x^2+3x-m=0$$

w zależności od parametru m.

Krok 1. Sprawdzamy a. Jeśli $m=\frac{1}{2}$ to $a=0$ i równanie ma postać $3x-\frac{1}{2}=0$. Równanie to ma jedno rozwiązanie.

Krok 2. Jeśli $m\neq\frac{1}{2}$, to $a\neq 0$ i sprawdzamy Δ.

$$\Delta=3^2-4(1-2m)(-m)=-8m^2+4m+9$$

Przykłady 2 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4})$.

Przykłady 2 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4})$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$.

Przykłady 2 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4})$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{19}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{19}}{4}, \infty)$.

Przykłady 2 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4})$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{19}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{19}}{4}, \infty)$.

Ostatecznie mamy:

- dwa rozwiązania dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4}) - \{\frac{1}{2}\}$.

Przykłady 2 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4})$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{19}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{19}}{4}, \infty)$.

Ostatecznie mamy:

- dwa rozwiązania dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4}) - \{\frac{1}{2}\}$.
- jedno rozwiązanie dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$ oraz dla $m = \frac{1}{2}$.

Przykłady 2 cd.

Δ jest dodatnia dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4})$.

Δ jest 0 dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$.

Δ jest ujemna dla $m \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{19}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{19}}{4}, \infty)$.

Ostatecznie mamy:

- dwa rozwiązania dla $m \in (\frac{1-\sqrt{19}}{4}, \frac{1+\sqrt{19}}{4}) - \{\frac{1}{2}\}$.
- jedno rozwiązanie dla $m = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{4}$ oraz dla $m = \frac{1}{2}$.
- brak rozwiązań dla $m \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{19}}{4}) \cup (\frac{1+\sqrt{19}}{4}, \infty)$.

Wejściówka

Na wejściówkę trzeba umieć rozwiązać przykłady analogiczne do powyższych.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.