Wektory - powtórzenie z 1.klasy

Musimy umieć:

- mając dwa punkty A i B, wyznaczyć wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$,
- mając dany punkt A i wektor $\vec{v}$, wyznaczyć punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ lub $\overrightarrow{BA} = \vec{v}$,
- mając dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ z parametrem, wyznaczyć parametr tak, by podane wektory były równe, przeciwne, równoległe,
- obliczyć długość danego wektora,
- obliczyć kąt między dwoma niezerowymi wektorami.

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektor $\vec{v} = [1, 2]$ to instrukcja: idź o jeden w prawo (zwiększ współrzędną x o 1) i idź o dwa do góry (zwiększ współrzędną y o 2).

Wektory

O wektorach najprościej myśleć jak o instrukcji (poleceniu).

Wektor $\vec{v} = [1, 2]$ to instrukcja: idź o jeden w prawo (zwiększ współrzędną x o 1) i idź o dwa do góry (zwiększ współrzędną y o 2).

Wektor $\vec{u} = [3, -1]$ to instrukcja: idź o trzy w prawo (zwiększ współrzędną x o 3) i idź o jeden w dół (zmniejsz współrzędną y o 1).

Wektory

Ten sposób myślenia od razu sugeruje, że wektor taki, jak $\vec{v} = [1, 2]$ nie ma jednego określonego miejsca w układzie współrzędnych.

Wektory

Ten sposób myślenia od razu sugeruje, że wektor taki, jak $\vec{v} = [1, 2]$ nie ma jednego określonego miejsca w układzie współrzędnych.

Jeśli przyłożymy ten wektor do środka układu współrzędnych, to będzie on wskazywał punkt $(1, 2)$, ale jeśli przyłożymy go do punktu $(3, 5)$, to wskaże punkt $(4, 7)$.

Wektory

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego z nich do drugiego. Dla punktów A i B, wektor $\overrightarrow{AB}$ to będzie wektor prowadzący z punktu A do punktu B. Natomiast wektor $\overrightarrow{BA}$ to wektor prowadzący z punktu B do punktu A.

Wektory

Mając dane dwa punkty możemy zapytać, jaki wektor prowadzi z jednego z nich do drugiego. Dla punktów A i B, wektor $\overrightarrow{AB}$ to będzie wektor prowadzący z punktu A do punktu B. Natomiast wektor $\overrightarrow{BA}$ to wektor prowadzący z punktu B do punktu A.

Dla danych punktów $A(x_A, y_A)$ oraz $B(x_B, y_B)$, mamy następujące wektory:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$
$$\overrightarrow{BA} = [x_A - x_B, y_A - y_B]$$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

Przykład 1

Dane są punkty $A(3, 1)$ oraz $B(-1, 2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = [-1 - 3, 2 - 1] = [-4, 1]$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

Przykład 1

Dane są punkty $A(3,1)$ oraz $B(-1,2)$. Znajdź wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AB} = [-1-3, 2-1] = [-4, 1]$$

Zinterpretujmy ten wynik: by dojść z punktu A do punktu B musimy iść o 4 jednostki w lewo (zmniejszyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę do góry (zwiększyć współrzędną y o 1).

$$\overrightarrow{BA} = [3-(-1), 1-2] = [4, -1]$$

By dojść z punktu B do punktu A musimy iść o 4 jednostki w prawo (zwiększyć współrzędną x o 4) oraz o 1 jednostkę w dół (zmniejszyć współrzędną y o 1).

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3,-1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3,-1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$
$$y_B - 3 = -1$$

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $B(x_B, y_B)$, wtedy:

$$x_B - 2 = 3$$
$$y_B - 3 = -1$$

Otrzymujemy $x_B = 5$ oraz $y_B = 2$, czyli $B(5,2)$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2, 3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3, -1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Przykład 2

Dany jest punkt $A(2,3)$ oraz wektor $\vec{v} = [3,-1]$. Znajdź punkt B taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Prostsza interpretacja jest następująca: skoro $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, to znaczy, że wektor $\vec{v}$ ma nas prowadzić z punktu A do punktu B. Startując z $A(2,3)$ mamy zwiększyć współrzędną x o 3 i zmniejszyć współrzędną y o 1. Otrzymujemy $B(5,2)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v}=[1,-2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1, 5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1, -2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$\begin{aligned} 1 - x_A &= 1 \\ 5 - y_A &= -2 \end{aligned}$$

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1,-2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$1 - x_A = 1$$
$$5 - y_A = -2$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0,7)$.

Przykład 3

Dany jest punkt $B(1,5)$ oraz wektor $\vec{v} = [1,-2]$. Znajdź punkt A taki, że $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Możemy ułożyć równania. Niech $A(x_A, y_A)$, wtedy:

$$\begin{aligned} 1 - x_A &= 1 \\ 5 - y_A &= -2 \end{aligned}$$

Otrzymujemy $x_A = 0$ oraz $y_A = 7$, czyli $A(0,7)$.

Zastanów się nad prostszą interpretacją tego zadania.

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

- równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,
- przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,

Wektory

Dwa wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są:

- równe, gdy $v_x = u_x$ oraz $v_y = u_y$,
- przeciwne, gdy $v_x = -u_x$ oraz $v_y = -u_y$,
- równoległe, gdy istnieje liczba rzeczywista p taka, że $v_x = p \times u_x$ oraz $v_y = p \times u_y$.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2m - 3 &= -n \\ 3m &= -(n - 5) \end{aligned}$$

Przykład 4

Znajdź wartości parametrów m i n, dla których wektory $\vec{v} = [2m - 3, 3m]$ oraz $\vec{u} = [n, n - 5]$ są przeciwne.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2m - 3 &= -n \\ 3m &= -(n - 5) \end{aligned}$$

Otrzymujemy $m = 2$ oraz $n = -1$.

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k, dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k, dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$
\begin{aligned}
2 &= p \times (-4) \\
k &= p \times 1
\end{aligned}
$$

Przykład 5

Znajdź wartości parametrów k, dla którego wektory $\vec{v} = [2, k]$ oraz $\vec{u} = [-4, 1]$ są równoległe.

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{aligned} 2 &= p \times (-4) \\ k &= p \times 1 \end{aligned}$$

Otrzymujemy $k = -\frac{1}{2}$.

Długość wektora

Długość danego wektora $\vec{v}$ oznaczamy $|\vec{v}|$ i obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

Długość wektora

Długość danego wektora $\vec{v}$ oznaczamy $|\vec{v}|$ i obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = [2, -1]$

Przykład 6

Oblicz długość wektora $\vec{v} = [2, -1]$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1, -3)$ od punktu $B(2, 1)$.

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1,-3)$ od punktu $B(2,1)$. Znajdujemy wektor

$\overrightarrow{AB} = [1,4]$ i obliczamy jego długość

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Przykład 7

Oblicz odległość punktu $A(1,-3)$ od punktu $B(2,1)$. Znajdujemy wektor $\overrightarrow{AB}=[1,4]$ i obliczamy jego długość

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$$

Oczywiście zamiast wektora $\overrightarrow{AB}$ mogliśmy znaleźć wektor $\overrightarrow{BA}$ i obliczyć jego długośc - wynik byłby ten sam.

Kąt między wektorami

Mając dane dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ kąt α między tymi wektorami spełnia:

$$\cos\alpha = \frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} \qquad \sin\alpha = \frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|}$$

Wzory te są wyprowadzone w podręczniku. Cosinus łatwo wyprowadzamy z twierdzenia cosinusów, a sinus z jedynki trygonometrycznej (gdy już mamy cosinus).

Kąt między wektorami

Mając dane dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ oraz $\vec{u} = [u_x, u_y]$ kąt α między tymi wektorami spełnia:

$$\cos\alpha = \frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} \qquad \sin\alpha = \frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|}$$

Wzory te są wyprowadzone w podręczniku. Cosinus łatwo wyprowadzamy z twierdzenia cosinusów, a sinus z jedynki trygonometrycznej (gdy już mamy cosinus). Ważna uwaga: kąt między dwoma wektorami może mieć wartość od 0 do 180°, w związku z tym wzór na sinus nie pozwoli go nam jednoznacznie wyznaczyć (np. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ma dwa rozwiązania w przedziale $\langle 0, 180^\circ \rangle$, są to 30° oraz 150°). Lepiej zawsze policzyć ten kąt ze wzoru na cosinus.

Kąt między wektorami

Miłe konsekwencje wzorów na kąt:

Dwa wektory są prostopadłe, jeśli kąt między nimi wynosi 90°. Wiemy, że $\cos 90^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} = 0$$

Kąt między wektorami

Miłe konsekwencje wzorów na kąt:

Dwa wektory są prostopadłe, jeśli kąt między nimi wynosi 90°. Wiemy, że $\cos 90^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_x + v_y u_y = 0$$

Kąt między wektorami

Miłe konsekwencje wzorów na kąt:

Dwa wektory są prostopadłe, jeśli kąt między nimi wynosi 90°. Wiemy, że $\cos 90^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{v_x u_x + v_y u_y}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_x + v_y u_y = 0$$

Mamy więc:

Dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są **prostopadłe**, jeśli

$$v_x u_x + v_y u_y = 0$$

Kąt między wektorami

Druga miła konsekwencja wzorów na kąt:

> Dwa wektory są równoległe, jeśli kąt między nimi wynosi 0° lub 180°. Wiemy, że $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:
>
> $$\frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|} = 0$$

Kąt między wektorami

Druga miła konsekwencja wzorów na kąt:

Dwa wektory są równoległe, jeśli kąt między nimi wynosi 0° lub 180°. Wiemy, że $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_y - v_y u_x = 0$$

Kąt między wektorami

Druga miła konsekwencja wzorów na kąt:

Dwa wektory są równoległe, jeśli kąt między nimi wynosi 0° lub 180°. Wiemy, że $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$, stąd otrzymujemy:

$$\frac{|v_x u_y - v_y u_x|}{|v||u|} = 0$$

czyli:

$$v_x u_y - v_y u_x = 0$$

Mamy więc:

Dwa niezerowe wektory $\vec{v} = [v_x, v_y]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y]$ są **równoległe**, jeśli

$$v_x u_y - v_y u_x = 0$$

Wyznacznik wektorów

To wyrażenie $v_x u_y - v_y u_x$ powinno się nam wydawać znajome. Nazywamy je wyznacznikiem wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$.

Wyznacznik wektorów

To wyrażenie $v_x u_y - v_y u_x$ powinno się nam wydawać znajome. Nazywamy je wyznacznikiem wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$.

Mamy $v = [v_x, v_y]$ oraz $u = [u_x, u_y]$. Wyznacznik wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$ oznaczamy $det(\vec{v}, \vec{u})$ (od angielskiego determinant) i zapisujemy:

$$det(\vec{v}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} = v_x u_y - v_y u_x$$

Bardzo proszę to wszystko dobrze przestudiować! Dodatkowo strony 186-197 z podręcznika i zrobić zadania z części "sprawdź, czy rozumiesz" ze stron 191 i 197.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.