3. Potęgi. Logarytmy. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Podstawowe informacje

3.1. Potęga o wykładniku wymiernym

a) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, gdzie $a \geq 0$ i $n \in N - \{0,1\}$

b) $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, gdzie $a \geq 0$, $n \in N - \{0,1\}$, $m \in N_+$

c) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, gdzie $a > 0$, $n \in N - \{0,1\}$, $m \in N_+$

3.2. Prawa działań na potęgach

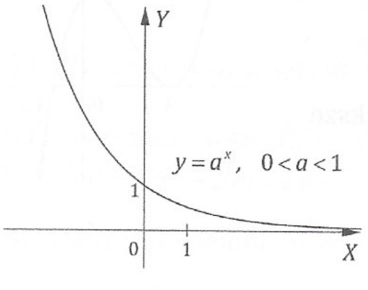
Jeśli $a > 0$ i $b > 0$ i $x, y \in \boldsymbol{R}$, to:

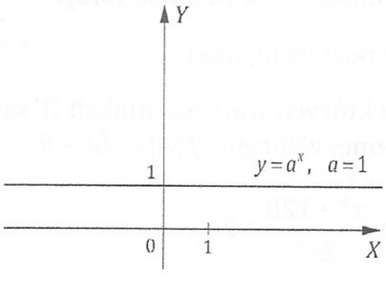
a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ b) $a^x : a^y = a^{x-y}$ c) $(a^x)^y = a^{xy}$

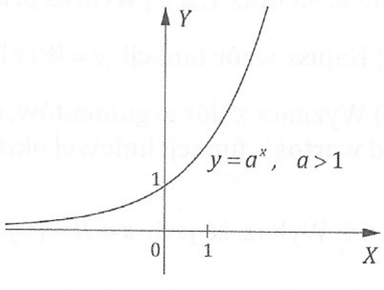
d) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ e) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

3.3. Funkcja wykładnicza

a) **Funkcją wykładniczą** nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór $\boldsymbol{R}$. Wykresem funkcji wykładniczej, jeśli $a \neq 1$, jest krzywa wykładnicza.







b) Z własności funkcji wykładniczej wynika, że:

1) Jeśli $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

2) Jeśli $a \in (0,1)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

3) Jeśli $a \in (1,+\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

3.4. Pojęcie logarytmu

Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$, to $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

3.5. Własności logarytmów

Jeśli $a, b \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$ oraz $x>0$ i $y>0$ i $r \in \boldsymbol{R}$, to:

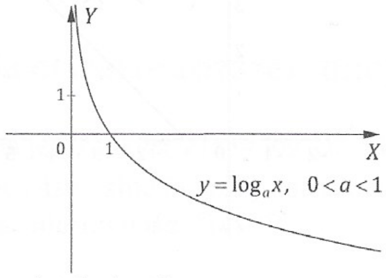
a) $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$ b) $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

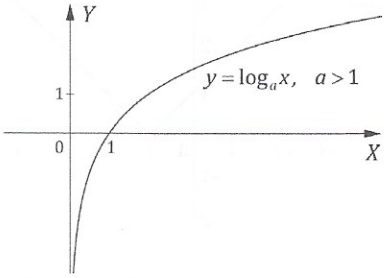
c) $r \cdot \log_a x = \log_a x^r$ d) $a^{\log_a b} = b$

e) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\left(\text{jeśli } x=b, \text{ to } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right)$

3.6. Funkcja logarytmiczna

a) **Funkcją logarytmiczną** o podstawie a, gdzie $a \in \boldsymbol{R}_+ - \{1\}$, nazywamy funkcję, którą można opisać wzorem $y = \log_a x$. Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór $\boldsymbol{R}_+$.
Wykresem funkcji logarytmicznej jest krzywa logarytmiczna:





b) Z własności funkcji logarytmicznej wynika, że:
1) Jeśli $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
2) Jeśli $a \in (0,1)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
3) Jeśli $a \in (1,+\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

Zadania zamknięte

3.1. Dane są liczby: $a = \frac{\left(\sqrt[4]{32} \cdot 0{,}5^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{8}{19}}}{\sqrt[3]{4}}$ oraz $b = \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{7-4\sqrt{3}}$. Zatem:

A. $a=b$ B. $a+b=3$ C. $a<b$ D. $a>b$

3.2. Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x) = \frac{\log_2 x}{\log_8 x}$. Niech *D* – oznacza dziedzinę funkcji *f*, natomiast *ZW* – zbiór wartości funkcji *f*. Zatem:

A. $D=(0,+\infty)$ i $ZW=\boldsymbol{R}$ B. $D=(0,+\infty)$ i $ZW=\boldsymbol{R}-\{1\}$

C. $D=\boldsymbol{R}_+-\{1\}$ i $ZW=\boldsymbol{R}_+$ D. $D=\boldsymbol{R}_+-\{1\}$ i $ZW=\{3\}$

3.3. Układ równań $\begin{cases} 3^{x+1}+3^y=28 \\ 3^x \cdot 3^y = 9 \end{cases}$ spełnia para liczb:

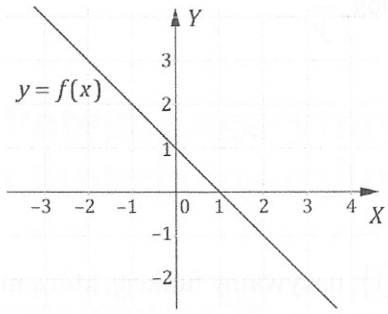
A. (−2, 4) B. (2, 0) C. (−1, −3) D. (3, 0)

3.4. Liczba $k = \frac{8-\log_{0,5}^3 3}{\log_{0,5}^2 3 + \log_{0,5}\frac{9}{16}}$ należy do przedziału:

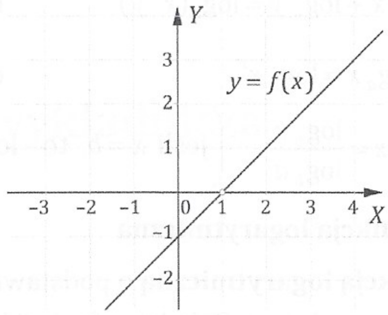
A. $(0,1)$ B. $(1,2)$ C. $(2,3)$ D. $(3,4)$

3.5. Wykres funkcji $f(x)=2^{\log_4(x-1)^2}$ przedstawia rysunek:

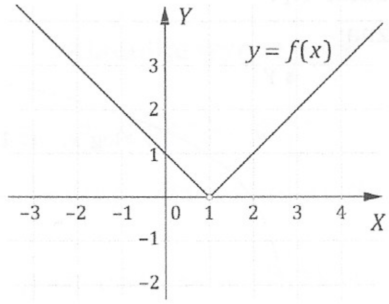
A.



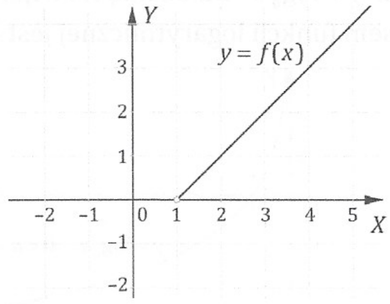
B.



C.



D.

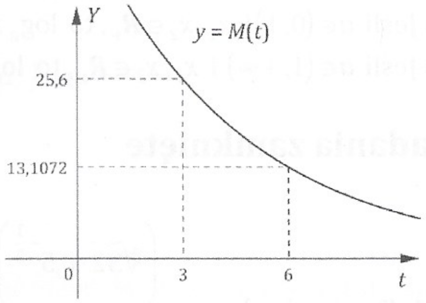


Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi

3.6. Na rysunku obok dany jest fragment wykresu funkcji $M(t)=M_0\cdot a^t$, gdzie $t>0$, która opisuje zmianę masy M substancji radioaktywnej w zależności od czasu t [w latach], M_o oznacza masę początkową tej substancji.

a) Na podstawie wykresu funkcji $y=M(t)$ wyznacz wartość a we wzorze funkcji.

b) Oblicz, o ile procent zmniejsza się każdego roku masa substancji radioaktywnej w stosunku do roku poprzedniego?



3.7. Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja f określona wzorem $f(x)=\log_3 x^2+\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}} x$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle 6,10\rangle$. Zakoduj wynik, podając średnią arytmetyczną końców otrzymanego przedziału liczbowego.

■ **3.8.** Niech $\log_3 8=p$. Wykaż, że $\log_6 24=\dfrac{3(p+1)}{p+3}$.

3.9. Funkcja $f(x)=25^x+25^{-x}$, gdzie $x\in \mathbf{R}$, przyjmuje dla pewnego argumentu a wartość równą 4,25. Oblicz, jaką wartość dla tego samego argumentu przyjmie funkcja $g(x)=5^x+5^{-x}$, $x\in \mathbf{R}$.

■ **3.10.** Wykaż, że jeśli $x\in(-\infty,0)$ i $a\in(0,1)$, to funkcja f określona wzorem $f(x)=a^x+\dfrac{1}{a^x-1}$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż 3.

3.11. Oblicz wartość wyrażenia $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot\log_2 7\cdot\log_7 16$. Zakoduj kwadrat otrzymanego wyniku, podając cyfrę setek, dziesiątek i jedności tej liczby.

3.12. Niech a oznacza największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x \cdot \log_4 3 > x+1$. Wyznacz liczbę a. Zakoduj liczbę a^{-2}, podając cyfrę jedności i kolejne dwie cyfry po przecinku jej rozwinięcia dziesiętnego.

■ **3.13.** Wykaż, że jeśli $a>1$ i $b \in (0,1)$, to $\log_{a+1}\sqrt[4]{b}+\log_b(a+1)<1$.

3.14. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x)=\log_2\left(x^2-6x+9\right)$.

3.15. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+x+5}$, gdzie $x \in \langle -2,1\rangle$. Wyznacz największą wartość funkcji *f*. Zakoduj cyfrę jedności i dwie kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego sześcianu otrzymanego wyniku.

Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi

3.16. Dana jest funkcja $f(x)=\log_2\left(x^2-1\right)-\log_2(1-x)$.
a) Wyznacz dziedzinę funkcji *f* i naszkicuj jej wykres.
b) Rozwiąż nierówność $f(x)<0$.

3.17. Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x)=\log_2\left[(m-4)x^2+2x+m+4\right]$.
a) Dla $m=4$ oblicz miejsce zerowe funkcji *f*.
b) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji *f* jest zbiór $\boldsymbol{R}$.

3.18. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, przyjmuje wartość 4.

3.19. Oblicz, dla jakich argumentów funkcja f określona wzorem $f(x)=\log_x 2 \cdot \log_{4x} 8$ przyjmuje wartości większe od $\frac{3}{8}$.

3.20. Wyznacz liczby a, b, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\log_b(x+a)$ jest zbiór $D_f=(-3,+\infty)$ i jednocześnie do wykresu tej funkcji należy punkt $A(13,-2)$. Następnie:
a) Oblicz miejsce zerowe funkcji *f*.
b) Rozwiąż nierówność $|f(x)|-f(x)>0$.

3.21. Rozwiąż równanie $\log_2\left(9-x^2\right)-\frac{1}{2}\log_2 x^2=3$.

3.22. Rozwiąż nierówność $\log_2 x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 2$.

3.23. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają warunek: $\log_5(x+4)-\log_5(-y)=\log_5\frac{y}{x-1}$.

3.24. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $25^x+2m\cdot 5^x+3m+4=0$ ma jedno rozwiązanie.

3.25. Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji $y=g(m)$, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $\left|\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{x^2-1}\right|=|m|-1$.