

### Zadania do samodzielnego rozwiązania

- 3.1. Dla jakich wartości parametru  $k \in R$  równanie nie ma rozwiązań rzeczywistych (nie ma pierwiastków rzeczywistych):  
 a)  $2x^2 + 3x + 2k - 5 = 0$ , b)  $x^2 + (k-1)x + 4 = 0$ , c)  $(k+1)x^2 - 4kx + 2k + 3 = 0$ ?
- 3.2. Dla jakich wartości parametru  $k$  nierówność  $-x^2 + 2x < -\frac{1}{k}$  jest spełniona dla każdego  $x \in R$ ?
- 3.3. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  równanie ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty? Znajdź ten pierwiastek.  
 a)  $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$ , b)  $(2-m)x^2 - 2x - 3 = 0$ ,  
 c)  $(m-3)x^2 + 2(m-3)x - 3m + 1 = 0$ .
- 3.4. Przy jakiej wartości parametru  $p$  trójmian  $y = (2p-5)x^2 - 2(p-1)x + 3$  jest kwadratem pewnego dwumianu?
- 3.5. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  równanie  $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$  ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty?
- 3.6. Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie  $(k+1)x^2 - 4kx + 2k + 3 = 0$  ma pierwiastki rzeczywiste?
- 3.7. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  równanie:  
 a)  $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 7 = 0$ , b)  $(m+2)x^2 + 6mx + 4m - 1 = 0$   
 ma pierwiastki rzeczywiste?
- 3.8. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  równanie:  
 a)  $(2m-3)x^2 + 4mx + m - 1 = 0$ , b)  $(m-1)x^2 - (m+1)x + \frac{1}{4}(m+1) = 0$ ,  
 ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?
- 3.9. Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie  $a \in R$  liczbę rozwiązań równania  $(a+2)x^2 + 6ax + 4a - 1 = 0$ . Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .
- 3.10. Zbadaj liczbę rozwiązań równania  $mx^2 - (m^2 + 1)x + m^2 + 1 = 0$  w zależności od wartości parametru  $m$ .
- 3.11. Określ liczbę rozwiązań równania  $(m^2 - 1)x^2 - (m+1)x + \frac{1}{2} = 0$  w zależności od wartości parametru  $m$ .
- 3.12. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  równanie:  
 a)  $(m-1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ , b)  $(2m-1)x^2 - (5m-2)x + 2m = 0$ ,  
 c)  $(m+1)^2 - 2mx + m - 1 = 0$   
 ma dwa pierwiastki przeciwnych znaków?

- 3.13. Dla jakich wartości parametru  $k$  równanie  $(k-1)x^2 + 2kx - k - 1 = 0$  ma dwa pierwiastki rzeczywiste  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1 x_2 \geq 1$ ?
- 3.14. Dla jakich wartości parametru  $k$  różnica rozwiązań równania  $2x^2 - (k-1)x - k - 1 = 0$  jest równa ich iloczynowi?
- 3.15. Dla jakich wartości parametru  $m$  suma sześciątów rozwiązań równania  $x^2 - mx + 1 = 0$  jest mniejsza od 2?
- 3.16. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $4mx^2 - 4(1-2m)x + 9m - 8 = 0$  ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków?
- 3.17. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie:  
 a)  $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 3m + 1 = 0$ , b)  $x^2 + (m+1)x + m + 9 = 0$   
 ma dwa różne pierwiastki dodatnie?
- 3.18. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  
 a)  $x^2 + (2m-3)x + 2m + 5 = 0$ , b)  $(1-m)x^2 - 2(m-1)x - m - 1 = 0$ ,  
 c)  $2(m+1)x^2 - mx + \frac{1}{8}m + 1 = 0$   
 ma dwa różne pierwiastki ujemne?
- 3.19. Wyznacz zbiór tych wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $mx^2 + (m-3)x + 2 - m = 0$  ma co najmniej jedno rozwiązanie dodatnie.
- 3.20. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $mx^2 + 2x + m - 2 = 0$  ma co najwyżej jeden pierwiastek dodatni?
- 3.21. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + 2(m-1)x + m + 5 = 0$  ma co najmniej jeden pierwiastek nieujemny?
- 3.22. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $(2m^2 + m - 1)x^2 + (5-m)x - 6 = 0$  ma co najwyżej jeden pierwiastek nieujemny?
- 3.23. Zbadaj dla jakich wartości parametru  $m$  jedno z rozwiązań równania  $(m+2)x^2 - 5x - m^2 + m = 0$  jest równe zero.
- 3.24. Dla jakich wartości parametru  $m$  jeden z pierwiastków trójmianu  $y = 2mx^2 - 2x + 2 - 3m$  jest równy zero?
- 3.25. Dla jakich wartości parametru  $k \in R$  równanie:  
 a)  $x^2 + (2-k)x + k^2 - \frac{11}{4} = 0$ ,  $r = -1$ ; b)  $x^2 - (1-k)x + 1 - k^2 = 0$ ,  $r = 2$   
 ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest mniejszy, zaś drugi większy od danej liczby  $r$ ?
- 3.26. Znajdź wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których jeden z pierwiastków równania  $(m-5)x^2 - 2mx + (m-4) = 0$  jest mniejszy od 1, a drugi zaś większy od 2.

- 3.27. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - (m-1)x + 2m - 5 = 0$  ma dwa różne rozwiązania, z których jedno jest dodatnie, a drugie mniejsze od liczby  $-1$ ?
- 3.28. Dla jakich wartości parametru  $a$  równanie  $(2a+1)x^2 - ax + a - 2 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest mniejsze od  $1$ , a drugie większe od  $1$ ?
- 3.29. Dla jakich wartości parametru  $k$  pierwiastki rzeczywiste równania  $(k+1)x^2 - 3kx + 4k = 0$  są większe od liczby  $1$ ?
- 3.30. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste większe od  $2$ ?
- 3.31. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 + (m-3)x - 2m + 6 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste większe od  $1$ ?
- 3.32. Dla jakich wartości parametru  $k \in R$  równanie  $x^2 + (2k+6)x + 4k + 12 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste większe od  $-1$ ?
- 3.33. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste mniejsze od  $3$ ?
- 3.34. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 4 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste mniejsze od  $4$ ?
- 3.35. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste mniejsze od  $2$ ?
- 3.36. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  funkcja  $f(x) = (1-m)x^2 + 2x + m + 1$  ma dwa miejsca zerowe należące do przedziału  $(-2; 2)$ ?
- 3.37. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste należące do przedziału  $(2; 12)$ ?
- 3.38. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  równanie  $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste należące do przedziału  $(-1; 5)$ ?
- 3.39. Zbadaj, jaką wartość powinien mieć parametr  $m$ , aby pierwiastki równania  $3x^2 + mx + 1 = 0$  mogły być sinusem i cosinusem tego samego kąta.
- 3.40. Dla jakich wartości parametru  $k \in R$  równanie  $x^2 - (k+1)x + \frac{6}{5}k = 0$  ma dwa pierwiastki będące sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego?
- 3.41. Dla jakich wartości parametru  $t$  pierwiastki równania  $x^2 + \frac{1}{t}x + t^2 = 0$  są sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego?
- 3.42. Dane jest równanie  $(k-2)x^2 - (k+1)x - k = 0$  o niewiadomej  $x$ . Wyznacz zbiór wartości parametru  $k$ , dla których równanie ma pierwiastki rzeczywiste  $x_1$  i  $x_2$  spełniające warunek  $|x_1| + |x_2| \leq 1$ .

- 3.43. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru  $m$  równanie  $x^2 - 6x + 2m^2 = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, z których jedno jest kwadratem drugiego?
- 3.44. Dla jakich wartości rzeczywistych parametru  $k$  równanie  $x^2 + 4x + k = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1$  i  $x_2$  spełniające warunek  $3x_1 - x_2 = 0$ ?
- 3.45. Dla jakich wartości parametru  $m$  suma odwrotności pierwiastków równania  $x^2 + (2 - 3m)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0$  ma wartość ujemną?
- 3.46. Dla jakich wartości parametru  $p$  suma kwadratów pierwiastków równania  $x^2 + (p - 1)x + 4 = 0$  osiąga wartość najmniejszą?
- 3.47. Dla jakich wartości parametru  $p$  suma odwrotności kwadratów pierwiastków równania  $x^2 - 2\sqrt{2}x + p^2 + 1 = 0$  osiąga wartość największą?
- 3.48. Dla jakich wartości parametrów  $m$  i  $p$  parabole określone równaniami  $y = x^2 + (m + 2)x + m$  i  $y = (-m - 2)x^2 + mx + m + p$  przecinają oś  $x$  w tych samych dwóch punktach?  
Wyznacz odległość wierzchołków tych parabol.
- 3.49. Dla jakich wartości parametru  $m$  równania  $2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$  i  $4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$  mają wspólny pierwiastek rzeczywisty? Oblicz ten pierwiastek.
- 3.50. Określ w zależności od wartości parametru  $m$  zbiór rozwiązań nierówności  $(m^2 - 4)x^2 + (m + 3)x - \frac{1}{2 - m} < 0$ .
- 3.51. Rozwiąż nierówność  $(m - 1)x^2 - 4x + m + 2 \leq 0$  w zależności od wartości parametru  $m$ .
- 3.52. Dla jakich wartości parametru  $m$  zbiorem rozwiązań nierówności  $(m^2 + 5m - 6)x^2 - 2(m - 1)x + 3 > 0$  jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?
- 3.53. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  nierówność  $mx^2 - (2m - 1)x + 2m - 1 > 0$  jest spełniona dla  $x \in R$ ?
- 3.54. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  nierówność  $(1 - m^2)x^2 + 2(1 - m)x - 2 < 0$  jest spełniona tożsamościowo?
- 3.55. Dla jakich wartości parametru  $m$  funkcja  $f(x) = (3m - 5)x^2 - (2m - 1)x + \frac{1}{4}(3m - 5)$  osiąga wartość najmniejszą i jest nią liczba dodatnia?
- 3.56. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  warunek  $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 \leq 0$  spełniony jest dla każdego  $x \in R$ ?
- 3.57. Dla jakich wartości parametru  $k$  zbiorem wartości trójmianu  $y = (k - 1)x^2 + (k - 1)x + k$  jest zbiór  $R^- \cup \{0\}$ ?

- 3.58. Dla jakich wartości parametru  $k$  zbiorem wartości funkcji  $f(x) = kx^2 - 4x + k + 3$  jest zbiór  $R^+ \cup \{0\}$ ?
- 3.59. Wyznacz takie wartości parametru  $p$ , dla których funkcja  $f(x) = px^2 + \frac{2p^2 - 81}{2}x - 12$  ma w punkcie  $x_0 = \frac{9}{4}$  wartość największą.
- 3.60. Dla jakich wartości parametru  $a \in R$  nierówność  $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$  jest spełniona, gdy  $|x| \leq 1$ ?
- 3.61. Dla jakich wartości parametru  $m$  nierówność  $(m-1)x^2 - 2x - m > 0$  jest spełniona dla każdego  $x > 3$ ?
- 3.62. Wyznacz takie wartości parametru  $m \in (-1; +\infty)$ , dla których nierówność  $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 < 0$  jest prawdziwa dla wszystkich  $x \in (1; 2)$ .
- 3.63. Dla jakich wartości parametru  $m$  trójmian  $y = x^2 - mx + 2$  przyjmuje wartości ujemne dla  $x \in (1; 2)$ ?
- 3.64. Zbadaj dla jakich wartości parametru  $m$  nierówności  $mx^2 - m < 6x - 10$  nie spełnia żadna liczba rzeczywista.
- 3.65. Sporządź wykres funkcji określonej wzorem  $f(x) = | -x^2 + 5x + 6 | - 1$ . Znajdź ekstrema tej funkcji. Zbadaj liczbę pierwiastków równania  $| -x^2 + 5x + 6 | - 1 = m$  w zależności od parametru  $m \in R$ .
- 3.66. Sporządź wykres funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = ||x^2 - 7x + 12| - 2|$ ,  $x \in R$ . Ustal liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ . Czy funkcja  $f$  ma ekstrema i jakie?
- 3.67. Dla jakich wartości parametru  $a \in R$  dziedziną funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = \sqrt{ax^2 - 4x + a + 3}$  jest zbiór liczb rzeczywistych?
- 3.68. Dla jakich wartości parametru  $m \in R$  dziedziną funkcji
- a)  $f(x) = \log [mx^2 - (2m-1)x + 2m-1]$ ,
- b)  $f(x) = \log \left[ (2m-3)x^2 + (6-m)x + \frac{1}{7}(m-9) \right]$
- jest zbiór liczb rzeczywistych?