Odpowiedzi

Geometria analityczna

Praca klasowa nr 1, grupa A

1.	a) Przeprowadzenie dowodu w oparciu o definicję izometrii.	2 pkt	6 pkt
	b) Wyznaczenie współrzędnych środka i promienia okręgu o: $S(-3, 1)$, $r = 2$ (1 pkt). Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu o_1: $S_1(3, 2)$ i zapisanie równania okręgu o_2: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ (1 pkt).	2 pkt	
	Wyznaczenie pól trójkątów: ΔSOS_1 i ΔSOA: $P_{\Delta SOS_1} = 4{,}5$ i $P_{\Delta SOA} = 4{,}5$. Wyznaczenie pola czworokąta SS_1OA: $P = 9$.	2 pkt	
2.	a) Obliczenie długości boków trójkąta: $\lvert AB\rvert = \sqrt{41}$, $\lvert AC\rvert = \sqrt{40}$, $\lvert BC\rvert = \sqrt{37}$. Wyznaczenie $\cos(\angle ACB) = \frac{9\sqrt{370}}{370}$.	3 pkt	6 pkt
	b) Obliczenie $\sin(\angle ACB) = \frac{17\sqrt{370}}{370}$. Wyznaczenie szukanej wysokości: $h_b = \frac{17\sqrt{10}}{10}$.	3 pkt	
3.	a) Obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = 2x - 8$. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a = -2$. Wyznaczenie współrzędnych punktu $P(3, -13)$ i zapisanie równania stycznej: $y = -2x - 7$.	3 pkt	6 pkt
	b) k: $y = -2x - 3$ (ta prosta ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f) lub k: $y = -2x - 11$ (ta prosta nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji f).	3 pkt	
4.	a) Wyznaczenie środka i promienia okręgu o: $S(3\sqrt{2}, 0)$, $r = 2\sqrt{2}$. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków sześciokąta foremnego: $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(2\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $C(4\sqrt{2}, \sqrt{6})$, $D(5\sqrt{2}, 0)$, $E(4\sqrt{2}, -\sqrt{6})$, $F(2\sqrt{2}, -\sqrt{6})$.	3 pkt	6 pkt
	b) Obliczenie pola figur: $F_1 = 12\sqrt{3}$, $F_2 = 6\pi$, $F = 6(2\sqrt{3} - \pi)$.	3 pkt	
5.	Ułożenie warunku na prostopadłość wektorów: $a^2(a-1) - 2(5a+4) = 0$ i doprowadzenie równania do postaci: $a^3 - a^2 - 10a - 8 = 0$.	2 pkt	6 pkt
	Znalezienie rozwiązań równania: $a \in \{-2, -1, 4\}$.	2 pkt	
	Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{v} - \vec{u} = [-7, 4]$ dla $a = -2$ i zapisanie równania prostej: $-7x + 4y = 0$.	2 pkt	

Praca klasowa nr 1, grupa B

1.	a) Przeprowadzenie dowodu w oparciu o definicję izometrii.	2 pkt	6 pkt
	b) Wyznaczenie współrzędnych środka i promienia okręgu o: $S(2, -3)$, $r = 1$ (1 pkt). Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu o_1: $S_1(1, 4)$ i zapisanie równania okręgu o_2: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$ (1 pkt).	2 pkt	
	Wyznaczenie pól trójkątów: ΔSOS_1 i ΔSOA: $P_{\Delta SOS_1} = 5{,}5$ i $P_{\Delta SOA} = 4{,}5$. Wyznaczenie pola czworokąta SS_1OA: $P = 10$.	2 pkt	
2.	a) Obliczenie długości boków trójkąta: $\|AB\| = \sqrt{41}$, $\|AC\| = \sqrt{37}$, $\|BC\| = \sqrt{40}$. Wyznaczenie $\cos(\angle ABC) = \dfrac{11\sqrt{410}}{410}$	3 pkt	6 pkt
	b) Obliczenie $\sin(\angle ABC) = \dfrac{17\sqrt{410}}{410}$. Wyznaczenie szukanej wysokości: $h_a = \dfrac{17\sqrt{10}}{10}$.	3 pkt	
3.	a) Obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = 2x - 12$. Wyznaczenie współczynnika kierunkowego stycznej: $a = -2$. Wyznaczenie współrzędnych punktu $P(5, -3)$ i zapisanie równania stycznej: $y = -2x + 7$.	3 pkt	6 pkt
	b) k: $y = -2x + 10$ (ta prosta ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji f) lub k: $y = -2x + 4$ (ta prosta nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji f).	3 pkt	
4.	a) Wyznaczenie środka i promienia okręgu o: $S(3\sqrt{3}, 0)$, $r = 2\sqrt{3}$. Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków sześciokąta foremnego: $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(2\sqrt{3}, 3)$, $C(4\sqrt{3}, 3)$, $D(5\sqrt{3}, 0)$, $E(4\sqrt{3}, -3)$, $F(2\sqrt{3}, -3)$.	3 pkt	3 pkt
	b) Obliczenie pola figur: $F_1 = 18\sqrt{3}$, $F_2 = 9\pi$, $F = 9(2\sqrt{3} - \pi)$.	3 pkt	
5.	Ułożenie warunku na prostopadłość wektorów: $a(a^2 - 5) + 2(a^2 - 3) = 0$ i doprowadzenie równania do postaci: $a^3 + 2a^2 - 5a - 6 = 0$.	2 pkt	6 pkt
	Znalezienie rozwiązań równania: $a \in \{-3, -1, 2\}$.	2 pkt	
	Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{u} - \vec{v} = [7, -4]$ dla $a = -3$ i zapisanie równania prostej: $7x - 4y = 0$.	2 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa A

1.	a) Wyznaczenie współrzędnych punktów: $A'(1, 1)$, $B'(-1, -1)$, $C'(8, 2)$.	3 pkt	6 pkt
	b) Obliczenie pól trójkątów: $P_{\Delta ABC} = 4$, $P_{\Delta A'B'C'} = 6$. Obliczenie szukanej liczby procent i zapisanie, że pole trójkąta $A'B'C'$ jest o 50% większe od pola trójkąta ABC.	3 pkt	
2.	a) Uzasadnienie, że boki AB i CD czworokąta są równoległe i że długości boków BC i AD są równe.	2 pkt	6 pkt
	b) Wyznaczenie symetralnych dwóch kolejnych boków, np. symetralna boku DC: $x + y - 10 = 0$; symetralna boku BC: $x - 5y + 25 = 0$. Wyznaczenie środka okręgu, jako punktu przecięcia symetralnych: $S\left(\frac{25}{6}, \frac{35}{6}\right)$. Wyznaczenie promienia okręgu jako długości odcinka SD: $r = \frac{\sqrt{650}}{6}$. Zapisanie równania okręgu: $(x - \frac{25}{6})^2 + (y - \frac{35}{6})^2 = \frac{325}{18}$.	4 pkt	
3.	Zapisanie współrzędnych punktu C jako $C(x, \frac{2}{x})$, $x < 0$. Zapisanie wzoru na pole jako funkcji: $f(x) = \left\vert\frac{x^2 - 3x + 2}{2x}\right\vert$, gdzie x – odcięta punktu C i $x < 0$.	2 pkt	6 pkt
	Wykorzystanie założenia o ujemnej odciętej punktu C do zapisania funkcji w postaci $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{2x}$, $x < 0$	1 pkt	
	Obliczenie pochodnej $f'(x) = \frac{-(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}$, zbadanie jej znaku i uzasadnienie że dla $x = -\sqrt{2}$ funkcja osiąga minimum lokalne. Podanie odpowiedzi $C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.	3 pkt	
4.	Wyznaczenie współrzędnych środków i promieni okręgów o_1 i o_2: $S_1(3, m)$, $r_1 = 1$, $S_2(m, 3)$, $r_2 = \sqrt{2}\,\lvert m\rvert$, $m \neq 0$.	2 pkt	6 pkt
	Wyznaczenie odległości środków: $\lvert S_1S_2\rvert = \sqrt{2}\,\lvert m - 3\rvert$ i ułożenie nierówności $\sqrt{2}\,\lvert m - 3\rvert > \sqrt{2}\,\lvert m\rvert + \sqrt{2}$, gdzie $m \neq 0$.	1 pkt	
	Rozwiązanie nierówności: $\lvert m - 3\rvert > \lvert m\rvert + 1$, $m \neq 0$ oraz	3 pkt	

	podanie odpowiedzi: $m \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$.		
5.	a) Narysowanie kwadratu o wierzchołkach w punktach $A = (2, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (-2, 0)$, $D = (0, 2)$.	2 pkt	6 pkt
	b) Zauważenie, że zbiór C jest czteroelementowy, gdy okrąg jest opisany na kwadracie: $m \in \{4, 0\}$, wówczas $C = \{(2, 0), (0, -2), (-2, 0), (0, 2)\}$ lub okrąg jest wpisany w kwadrat: $m \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$, wówczas $C = \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1), (-1, 1)\}$.	4 pkt	

Praca klasowa nr 2, grupa B

1.	a) Wyznaczenie współrzędnych punktów: $A'(-4, 1)$, $B'(3, 2)$, $C'(-1, -2)$.	3 pkt	6 pkt
	b) Obliczenie pól trójkątów: $P_{\Delta ABC} = 3$, $P_{\Delta A'B'C'} = 12$. Obliczenie szukanej liczby procent i zapisanie, że pole trójkąta ABC jest o 75% mniejsze od pola trójkąta $A'B'C'$.	3 pkt	
2.	a) Uzasadnienie, że boki AB i CD czworokąta są równoległe, i że długości boków BC i AD są równe.	2 pkt	6 pkt
	b) Wyznaczenie symetralnych dwóch kolejnych boków, np. symetralna boku AB: $x + y - 9 = 0$; symetralna boku BC: $3x - y - 12 = 0$. Wyznaczenie środka okręgu, jako punktu przecięcia symetralnych: $S\left(\frac{21}{4}, \frac{15}{4}\right)$. Wyznaczenie promienia okręgu, jako długości odcinka SD: $r = \frac{\sqrt{290}}{4}$. Zapisanie równania okręgu: $(x - \frac{21}{4})^2 + (y - \frac{15}{4})^2 = \frac{145}{8}$.	4 pkt	
3.	Zapisanie współrzędnych punktu C jako $C(x, \frac{3}{x})$, $x > 0$. Zapisanie wzoru na pole jako funkcji: $f(x) = \left\lvert \frac{x^2+4x+3}{x} \right\rvert$, gdzie x – odcięta punktu C i $x > 0$.	2 pkt	6 pkt
	Wykorzystanie założenia o dodatniej odciętej punktu C do zapisania funkcji w postaci $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x}$, $x > 0$.	1 pkt	
	Obliczenie pochodnej $f'(x) = \frac{-(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2x^2}$,	3 pkt	

	zbadanie jej znaku i uzasadnienie że dla $x = \sqrt{3}$ funkcja osiąga minimum lokalne. Podanie odpowiedzi $C(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.		
4.	Wyznaczenie współrzędnych środków i promieni okręgów o_1 i o_2: $S_1(m, 2)$, $r_1 = \sqrt{2}\,\lvert m \rvert$, $m \neq 0$, $S_2(2, m)$, $r_2 = \sqrt{2}$.	2 pkt	6 pkt
	Wyznaczenie odległości środków: $\lvert S_1S_2 \rvert = \sqrt{2}\,\lvert m - 2 \rvert$, ułożenie nierówności $\sqrt{2}\,\lvert m - 2 \rvert > \sqrt{2}\,\lvert m \rvert + \sqrt{2}$, gdzie $m \neq 0$.	1 pkt	
	Rozwiązanie nierówności: $\lvert m - 2 \rvert > \lvert m \rvert + 1$, $m \neq 0$ oraz podanie odpowiedzi: $m \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$.	3 pkt	
5.	a) Narysowanie kwadratu o wierzchołkach w punktach $A = (2, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (-2, 0)$, $D = (0, 2)$.	2 pkt	6 pkt
	b) Zauważenie, że zbiór C będzie czteroelementowy, gdy okrąg jest opisany na kwadracie: $m \in \{5, -3\}$, wówczas $C = \{(4, 0), (0, -4), (-4, 0), (0, 4)\}$ lub okrąg jest wpisany w kwadrat: $m \in \{1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}\}$, wówczas $C = \{(2, 2), (2, -2), (-2, -2), (-2, 2)\}$.	4 pkt	