Odległość punktu od prostej

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l.

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,
- znajdujemy B - punkt przecięcia prostych l i m,

Wprowadzenie

Przypuśćmy, że chcemy obliczyć odległość danego punktu A od danej prostej l. Jeśli punkt A leży na tej prostej, to nie ma czego obliczać, zapiszemy, że:

$$d(A, l) = 0$$

Jeśli natomiast punkt A nie leży na l, to możemy zrobić to następująco:

- znajdujemy prostą m, prostopadłą do l i przechodzącą przez A,
- znajdujemy B - punkt przecięcia prostych l i m,
- obliczamy odległość punktu A od punktu B (ze wzoru albo np. licząc długość $\overrightarrow{AB}$).

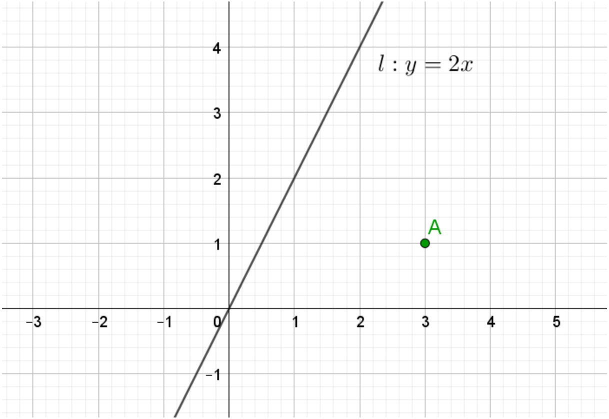
Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A(3, 1)$ od prostej $y = 2x$.

Przykład 1

Obliczymy odległość punktu $A(3,1)$ od prostej $y = 2x$.

Rysunek:



Przykład 1

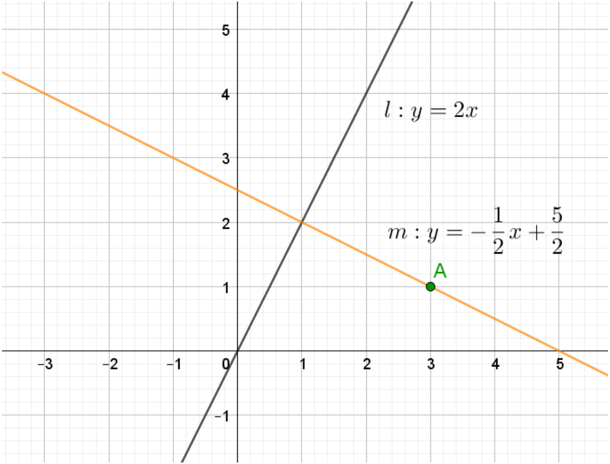
Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.

Przykład 1

Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.
Otrzymujemy $m: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Przykład 1

Obliczamy prostą m prostopadłą do l i przechodzącą przez A.
Otrzymujemy $m : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$



Przykład 1

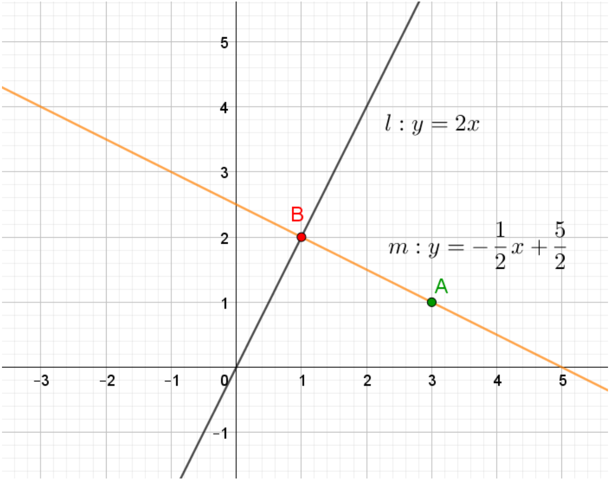
Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m.

Przykład 1

Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m. Otrzymujemy $B(1, 2)$

Przykład 1

Obliczamy punkt B - punkt przecięcia prostych l i m. Otrzymujemy $B(1,2)$



Przykład 1

Odległość od A do l jest równa odległości od A do B, czyli:

$$d(A,l) = d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Wzór

Cały ten proces moglibyśmy przeprowadzić bez konkretnych liczb i korzystając ze wzoru prostych w postaci ogólnej (jest to zrobione w podręczniku na stronach 217-218).

Wzór

Cały ten proces moglibyśmy przeprowadzić bez konkretnych liczb i korzystając ze wzoru prostych w postaci ogólnej (jest to zrobione w podręczniku na stronach 217-218).

Uzyskalibyśmy wtedy wzór na odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej k danej równaniem $Ax + By + C = 0$:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne.

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne. Po pierwsze jeśli dwie proste l i k nie są równoległe, to znaczy, że się przetną, czyli odległość między nimi będzie wynosić 0.

Dwie proste

Obliczanie odległości między dwiema prostymi jest dosyć analogiczne. Po pierwsze jeśli dwie proste l i k nie są równoległe, to znaczy, że się przetną, czyli odległość między nimi będzie wynosić 0.

Jeśli natomiast proste są równoległe, to wystarczy wybrać dowolny punkt na jednej z nich i obliczyć odległość tego punktu od drugiej prostej.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Wybieramy dowolny punkt na prostej l, np. $(-2, 1)$ i teraz obliczamy odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$:

Przykład

Obliczymy odległość prostej $l : 2x + 7y - 3 = 0$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$.

Wybieramy dowolny punkt na prostej l, np. $(-2, 1)$ i teraz obliczamy odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k : 2x + 7y + 4 = 0$:

$$d(l, k) = d(P, k) = \frac{|2 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + 7^2}} = \frac{7}{\sqrt{53}} = \frac{7\sqrt{53}}{53}$$

Wzór

Znów gdybyśmy obliczyli odległość dwóch prostych w postaci ogólnej bez konkretnych liczb tylko na wzorach (podręcznik strony 222-223) to otrzymalibyśmy przyjemny wzór:

Odległość dwóhc porstych równoległych

Jeśli $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ to mamy:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k: 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l: 6x - 3y + 1 = 0$

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe:

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$. Ok, są równoległe.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$. Ok, są równoległe.

Chcielibyśmy skorzystać ze wzoru, ale zanim to zrobimy musimy wykonać jeszcze jeden krok - zapisać obie proste w odpowiedniej postaci.

Przykład

Obliczymy odległość prostej $k : 2x - y + 2 = 0$ od prostej $l : 6x - 3y + 1 = 0$

Upewnijmy się, że proste są równoległe: $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot (6) = 0$. Ok, są równoległe.

Chcielibyśmy skorzystać ze wzoru, ale zanim to zrobimy musimy wykonać jeszcze jeden krok - zapisać obie proste w odpowiedniej postaci. Mamy postać ogólną, ale odowiednie współczynniki nie są równe.

$$k : 2x - y + 2 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k i otrzymujemy:

$$k: 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l: 6x - 3y + 1 = 0$$

Teraz mamy $A = 6, B = -3, C_1 = 6, C_2 = 1$.

Przykład

Pomnożymy obie strony równania prostej k i otrzymujemy:

$$k : 6x - 3y + 6 = 0$$
$$l : 6x - 3y + 1 = 0$$

Teraz mamy $A = 6, B = -3, C_1 = 6, C_2 = 1$. Korzystamy ze wzoru:

$$d(k, l) = \frac{|6 - 1|}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mamy już cztery bardzo ważne wzory z geometrii analitycznej.

Wzory z geometrii analitycznej

Mamy już cztery bardzo ważne wzory z geometrii analitycznej.

Dla prostych w postaci kierunkowej $k : y = a_1x + b_1$ i $l : y = a_2x + b_2$ kąt ostry γ między tymi prostymi spełnia warunek:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}\right|$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mamy już cztery bardzo ważne wzory z geometrii analitycznej.

Dla prostych w postaci kierunkowej $k: y = a_1x + b_1$ i $l: y = a_2x + b_2$ kąt ostry γ między tymi prostymi spełnia warunek:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}\right|$$

Dla prostych w postaci ogólnej $k: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $l: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ kąt ostry γ między tymi prostymi spełnia warunek:

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mając dane dwie proste równoległe w postaci ogólnej $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ odległość między tymi prostymi dana jest wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Wzory z geometrii analitycznej

Mając punkt $P(x_0, y_0)$ oraz prostą w postaci ogólnej $k : Ax + By + C = 0$ odległość punktu P od prostej k dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mając dane dwie proste równoległe w postaci ogólnej $k : Ax + By + C_1 = 0$ i $l : Ax + By + C_2 = 0$ odległość między tymi prostymi dana jest wzorem:

$$d(k, l) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Pamiętajmy, że w ostatnim wzorze musimy najpierw tak zapisać wzory, by współczynniki A i B zgadzały się w obu prostych.

Pierwsze trzy wzory są na kartach wzorów, ostatniego tam nie ma.

W razie jakichkolwiek pytań, proszę pisać na T.J.Lechowski@gmail.com.